抛物线与直线、线段、射线的交点个数问题（含参）

（本文不打算讲述与坐标轴及其平行线相交的相关情况，不了解的同学可先自行脑补。）

抛物线与直线（线段、射线）相交的问题可以转化为一元二次方程在自变量相应范围内解的问题；反之亦然。函数与方程联系紧密，要善于用函数的观点来解决方程问题的同时也要学会用方程思想来处理函数问题，数形结合是解决此类问题的最有效方法。

具体思路是：

1.直线 $y=mx+n$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的交点问题可转化为联立后的一元二次方程根的相关问题，解的个数<=>判别式△<=>交点个数，解方程的根<=>求交点坐标；

2.如果是线段或射线与抛物线相交则看成联立后的一元二次方程在 x 相应范围内解的问题，此时可将此一元二次方程看成抛物线与 x 轴（或其平行线）交点如何分布的问题，亦可利用图形将条件转化为方程或不等式解决，过程中须反复应用数形结合思想，画出重要临界时刻下的图形图象进行分析，综合运用能力要求高。

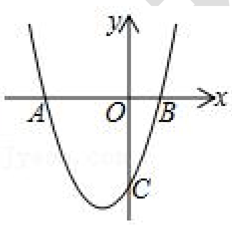
1.抛物线与直线相交（含参）

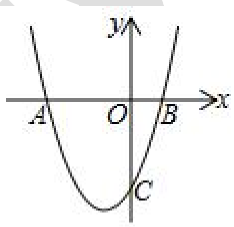
实战例题 1．抛物线 C_1 经过 A（﹣3，0）、B（1，0）、C（0，﹣3）三点．

（1）求抛物线的解析式．

（2）点 E 是抛物线 C_1 的顶点，将 C_1 沿着 l_{EC} 的方向平移至 C_2．当 C_2 与 $y=2x-5$ 只有一个公共点时：

求 C_2 的解析式．　（2020 年武汉二中九上数学训练（五）24 改）





备用图

解析：观察所给点的坐标，利用两根式设表达式比较方便。

（1）抛物线的表达式为：$y=a(x+3)(x-1)=a(x^2+2x-3)$，

故 $-3a=-3$，解得：$a=1$，

故抛物线的表达式为：$y=x^2+2x-3$；

抛物线平移可转化为顶点的平移，方向与距离是一致的，所以需写出平移后的顶点坐标（含参数），即可通过顶点式得抛物线解析式，然后联立与其相交的直线解析式得方程，

令判别式△=0，即可求得参数。

（2）顶点 E 的坐标为：（﹣1，﹣4），点 C（0，﹣3），

则直线 AC 的倾斜角为 45°，

设抛物线向右平移 m 个单位，则向上平移 m 个单位，

则新抛物线顶点的坐标为：（﹣1+m，﹣4+m），

则 C_2 的表达式为：$y=(x+1-m)^2-4+m$，

将 C_2 与 $y=2x-5$ 联立并整理得：$x^2-2mx+m^2-m+2=0$，

则 $\Delta=4m^2-4(m^2-m+2)=0$，解得：$m=2$，

故 C_2 的表达式为：$y=x^2-2x-1$；

训练. 如图 1，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点（A 在 B 的左侧），与 y 轴交于 C，且 AB＝2OC

(1) 求 c 的值

(2) 若 P(m，n)是抛物线上一动点，过 P 点作直线 l 交 y 轴于 Q(0，s)，且直线 l 和抛物线只有唯一公共点，求 n＋s 的值.　　　（2021 年武汉六中九上周练（一）24 改）

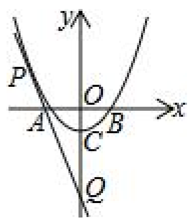
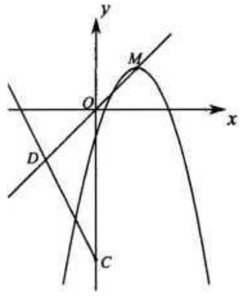


图 1

2.抛物线与射线相交（含参）

实战例题 2. 如图，已知抛物线 $y=-x^2+4x-2$ 的顶点为 M，直线 $y=-2x-6$ 与 y 轴交于点 C，与直线 MO 交于点 D. 现将抛物线的顶点在直线 OD 上平移，平移后的抛物线与射线 CD 只有一个公共点，求它的顶点横坐标的值或取值范围.



解析：需要解决的问题 1.平移后的抛物线如何求？直线 CD 呢？2.在平移的过程中，直线与抛物线位置关系式怎样演变的？3.临界状态分别在什么时候？

1. 平移后抛物线解析式为 $y=-(x-m)^2+m$
2. 演化过程：在如图所示的的状态下是与射线有一个公共点的，符合题意，如果将抛物线向右上平移时，抛物线与直线交点会逐渐下移，点 C 是最后的公共点；如果抛物线左下平移则交点会逐渐上移，但在某个时刻会出现点 C 再次在抛物线右部分图象上。此时开始有两个公共点，是不符合题意的；如果继续左下移动，这两个公共点逐渐靠拢，最后重合于一点，此时抛物线与直线 CD 有唯一公共点，符合题意，继续下移后二者不会再有公共点。
3. 从以上演化中我们可以看出有三个临界时刻，分别是两次过点 C，以及抛物线与直线 CD 只有一个公共点时，题目要求的是与射线 CD 相交，所以是否满足题意还应检验此时的唯一公共点是否在射线 CD 上。

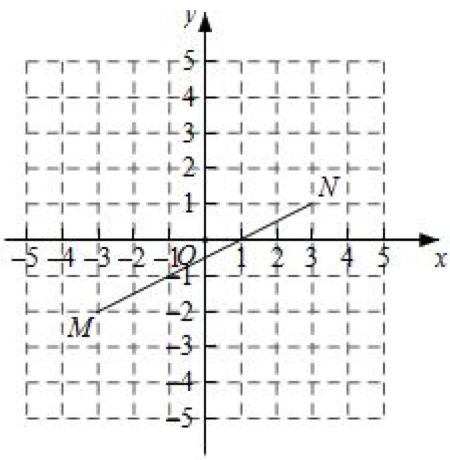
简解：$y=-(x-m)^2+m$ 过 C(0,6)时，得 $m_1=3, m_2=-2$，分别对应左右部分过 C 时　所以-2＜m≤3；

抛物线与直线 CD 只有一个公共点时，联立后得新一元二次方程令△=0，可得 $m=-\frac{7}{3}$,经检验可知符合题意，综合知 $m=-\frac{7}{3}$ 或 $m_1=3, m_2=-2$.

3.抛物线与线段相交（含参）

实战例题 3.如图，已知点 A（m－2，0），点 B（0，c），点 C（m+2，0），点 M（－3，－2），点 N（3，1），现过 A，B，C 三点的抛物线的解析式为 y=－x²+bx+c，当该抛物线与线段 MN 有且仅有一个交点时，请直接写出符合题意 m 的取值范围是________________________________.

（2021 年武汉二中九上质量评估（三）23 改）



解析：先求出抛物线（含参），和直线 MN，然后再分析可能的情况：1.抛物线与直线 MN 只有一个公共点，此时对应△=0,但须检验公共点是否在线段上。如下图；

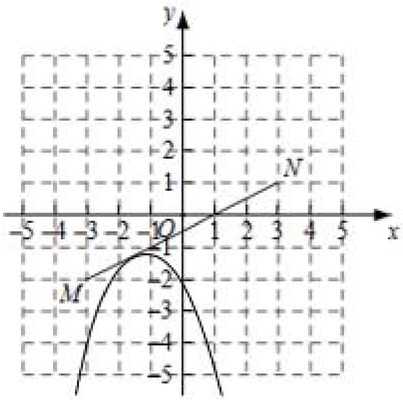


图2

2. 抛物线与线段只有一个交点，则此时△>0，从图象上看为“穿过”线段状态，如下图所示.

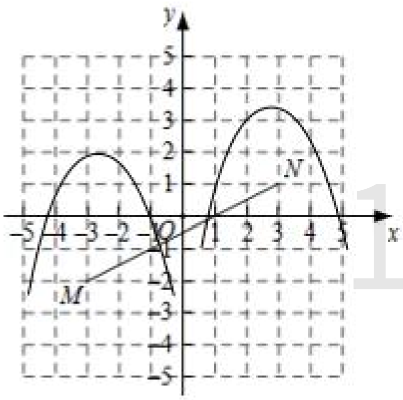


图 3

解：∵点 A（m－2，0），点 C（m+2，0）在抛物线 y＝－x^2+bx+c 的图象上，

∴y＝－（x－m+2）（x－m－2）＝－x^2+2mx+（4－m^2），

设直线 MN 的解析式为 y＝kx+b（k≠0），

把点 M（－3，－2），点 N（3，1），代入解析式得：

$\begin{cases}-3k+b=-2\\3k+b=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}$，

∴直线 MN 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$，

①如图 2，当抛物线与直线 MN 只有一个交点时，

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\\y=-x^2+2mx+(4-m^2)\end{cases}$，得：$x^2+(\frac{1}{2}-2m)x+(m^2-\frac{9}{2})=0$，

∴$\Delta=(\frac{1}{2}-2m)^2-4(m^2-\frac{9}{2})=0$，

解得：$m=\frac{73}{8}$，

此时，$x^2+(\frac{1}{2}-2m)x+(m^2-\frac{9}{2})=0$ 的解为：$x=\frac{-(\frac{1}{2}-2m)}{2}=\frac{71}{8}$，

∵$3<\frac{71}{8}$，

∴抛物线与直线 MN 的交点不在线段 MN 上，

∴$m=\frac{73}{8}$不符合题意，

②如图 3，当抛物线与直线 MN 有两个交点时，$m<\frac{73}{8}$，

∵抛物线与线段 MN 只有一个交点，

∴ $\begin{cases}-m^2-6m-5\geq-2\\-m^2+6m-5\leq1\end{cases}$或 $\begin{cases}-m^2-6m-5\leq-2\\-m^2+6m-5\geq1\end{cases}$，

解得：$-3-\sqrt{6}\leq m\leq-3+\sqrt{6}$或 $3-\sqrt{3}\leq m\leq3+\sqrt{3}$，

∵ $m<\frac{73}{8}$，

∴ $-3-\sqrt{6}\leq m\leq-3+\sqrt{6}$或 $3-\sqrt{3}\leq m\leq3+\sqrt{3}$，

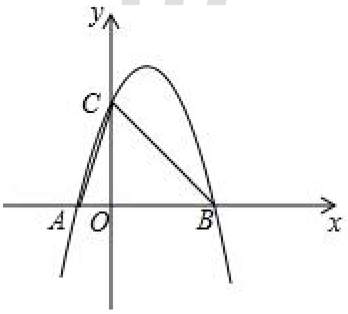
综上所述：m 的取值范围为：$-3-\sqrt{6}\leq m\leq-3+\sqrt{6}$或 $3-\sqrt{3}\leq m\leq3+\sqrt{3}$.

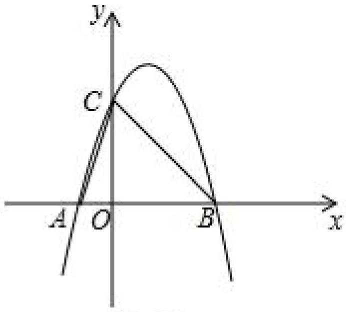
故答案为：$-3-\sqrt{6}\leq m\leq-3+\sqrt{6}$或 $3-\sqrt{3}\leq m\leq3+\sqrt{3}$.

针对训练 1．抛物线 $y=ax^2-2ax-3a$ 与 x 轴交于 A、B（A 在 B 的左侧），与 y 轴正半轴交于点 C，且 $S_{\triangle ABC}=6$．

（1）求抛物线的解析式；

（2）点 P（m，0）为 x 轴上一动点将线段 OC 绕点 P 逆时针旋转 90°，得到线段 O'C'，若线段 O'C'与抛物线只有一个公共点求 m 的取值范围．(2021 年武汉二中九上质量评估（一）24 改）





备用图

2．在平面直角坐标系中，抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}mx+\frac{1}{4}m^2-2m$ 顶点为 M．

G（﹣3，1），H（1，2），若该抛物线与线段 GH 只有一个公共点，求 m 的取值范围．（2020 七一华源九上 9 月考 24 改）