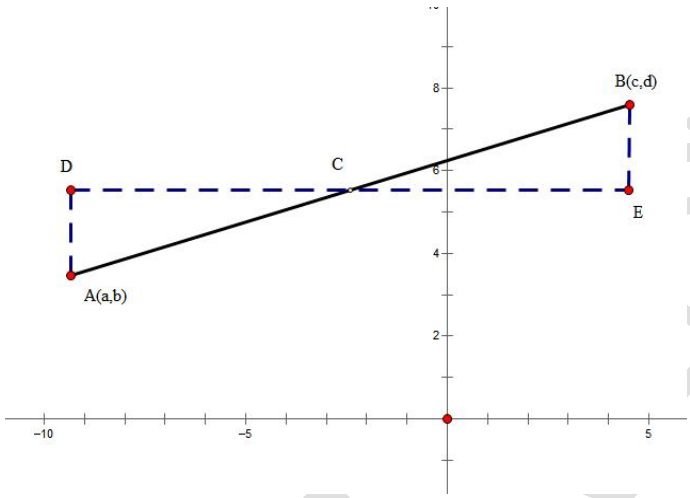
八年级下册压轴题之平面直角坐标系中平行四边形（矩形菱形正方形）存在性问题的处理策略

我们知道平行四边形的基本判定定理有 1.一组对边平行且相等；2.两组对边分别平行；3.两组对边分别相等；4.对角线互相平分。在处理平四存在性问题时主要依据这些判定定理以及平面直角坐标系中“中点公式”或者“坐标平移法”来进行解题。

要点 1：中点公式

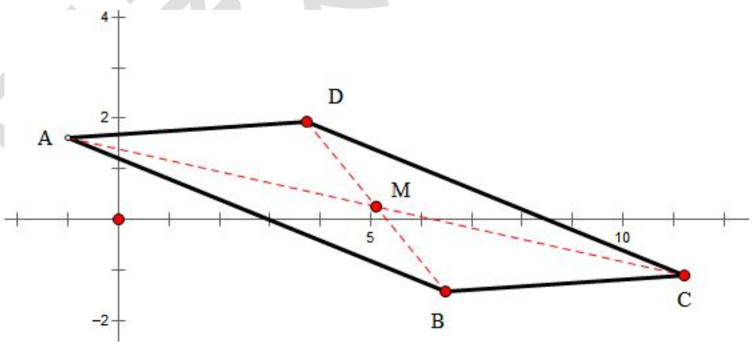
如下图，平面直角坐标系中，已知 A(a,b)和 B(c,d)，点 C 为线段 AB 的中点，则有点 C($\frac{a+c}{2}$,$\frac{b+d}{2}$).



推导过程简析：如图，分别过 C 作横轴平行线，过点 A,B 作纵轴平行线，分别相交于 D,E，则易证明△ACD≌△BCE(AAS).则有 DC=EC,AD=BE.则$x_C-x_A=x_E-x_C$,$y_C-y_A=y_B-y_C$,即可求得.

要点 2：平行四边形的四顶点坐标方程

如图：在平行四边形 ABCD 中，有$x_A+x_C=x_B+x_D$,$y_A+y_C=y_B+y_D$,

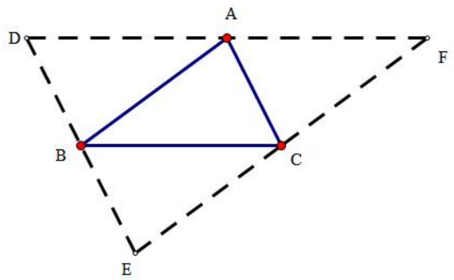


推导过程：因为平行四边形性质有对角线互相平分，所以两次利用“中点公式”即可（或坐标平移亦可，本质是一样的）.

解题策略：所有的平行四边形存在性问题，基本都可以利用上述四顶点坐标方程求解，具体步骤如下：一，写出或设出顶点坐标；二，以“哪两个顶点相对”作为分类标准（即以对角线不同进行分类）；三，利用中点公式列方程，解方程。基本思路是列（设）点、分类讨论，列方程解方程。

解题过程中需要注意题目意思，如果题目已给出四边形四个点的位置顺序（即顶点之间无逗号隔开）则不需要分类讨论，否则需要分类讨论。

题型 1.已知三点求第四点构成平行四边形。
如下图，已知 A,B,C 的坐标，求点 D,分别以 AB,BC,CA 为对角线可得三个不同位置的 D 点。



实战例题 1

（21 年八下期末青山区 24 题）

题 1．24．（12 分）如图，在平面直角坐标系中，直线 AB 与 x，y 轴分别交于点 A（4，0），B（0，3），点 C 是直线 $y=-\frac{5}{4}x+5$ 上的一个动点，连接 BC．

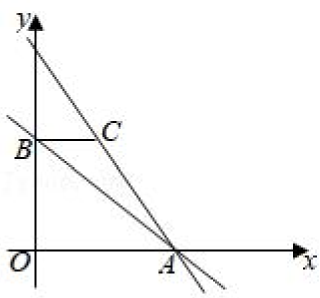


图1

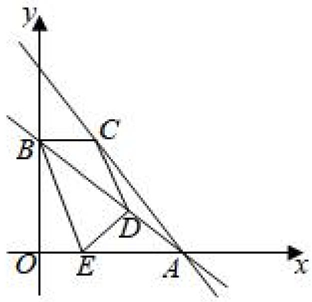


图2

（1）求直线 AB 的函数解析式；

（2）如图 1，若 BC∥x 轴，求点 C 到直线 AB 的距离；

（3）如图 2，点 E（1，0），点 D 是直线 AB 上的动点，试探索点 C，D 在运动过程中，是否存在以 B，C，D，E 为顶点的四边形是平行四边形，若存在，请直接写出点 C，D 的坐标；若不存在，请说明理由．

解析：（1）设一般式利用两点坐标列方程可求；（2）利用等积变换。宽高法求△ABC 面积，然后以 AB 为底，即可求出点 C 到 AB 的距离。我们看第（3）问。C,D 均为已知直线上的动点，故可以利用直线设动点坐标，B,E 点均为定点，坐标已知。

（1）设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases} b=3 \\ 0=4k+b \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k=-\frac{3}{4} \\ b=3 \end{cases}$，

故 AB 的表达式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$；

（3）策略：C,D 均为已知直线上的动点，故可以利用直线设动点坐标，B,E 点均为定点，坐标已知（可求）。

第一步列点：写出或设出顶点坐标

E（1，0），B（0，3）

设点 C、D 的坐标分别为（m，$-\frac{5}{4}m+5$）、（n，$-\frac{3}{4}n+3$），

第二步列线：以“哪两个顶点相对”作为分类标准（即以对角线不同进行分类）；

第三步列式：，利用中点公式列方程，解方程。

当 EB 是对角线时，

由中点坐标公式得：$0+1=m+n$ 且 $3+0=-\frac{5}{4}m+5-\frac{3}{4}n+3$，

解得 $\begin{cases} m=\frac{17}{2} \\ n=-\frac{15}{2} \end{cases}$，

故点 C、D 的坐标分别为（$\frac{17}{2}$，$-\frac{45}{8}$）、（$-\frac{15}{2}$，$\frac{69}{8}$）；

当 EC 是对角线时，

同理可得：$m+1=n$ 且 $-\frac{5}{4}m+5=-\frac{3}{4}n+3+3$，

解得，$\begin{cases} m=-\frac{1}{2} \\ n=\frac{1}{2} \end{cases}$

故点 C、D 的坐标分别为（$-\frac{1}{2}$，$\frac{45}{8}$）、（$\frac{1}{2}$，$\frac{21}{8}$）；

当 ED 是对角线时，

同理可得：$n+1=m$ 且 $0-\frac{3}{4}n+3=-\frac{5}{4}m+5+3$，

解得 $\begin{cases} m=\frac{15}{2} \\ n=\frac{17}{2} \end{cases}$，

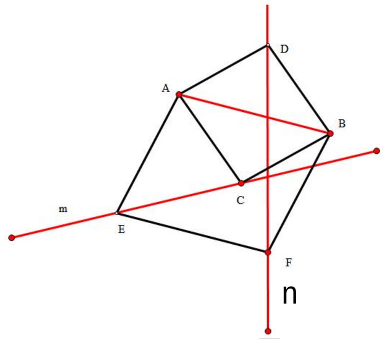
故点 C、D 的坐标分别为（$\frac{17}{2}$，$-\frac{45}{8}$）、（$\frac{15}{2}$，$-\frac{21}{8}$）.

综上，点 C、D 的坐标分别为（$\frac{17}{2}$，$-\frac{45}{8}$）、（$-\frac{15}{2}$，$\frac{69}{8}$）或（$-\frac{1}{2}$，$\frac{45}{8}$）、（$\frac{1}{2}$，$\frac{21}{8}$）或（$\frac{17}{2}$，$-\frac{45}{8}$）、（$\frac{15}{2}$，$-\frac{21}{8}$）.

总结：所有平行四边形存在性问题基本都可以用前述坐标模型来求解，只是根据题目给的限制条件稍有增减，比如下面练习题 1 中给出在 X 轴正半轴上去找动点，这样可能就不会出现四种情况那么多了，所以需要根据具体条件来分类。另外从实现手段上也可写出或设出三个点坐标，利用平四两条对角线交点为中点或坐标平移法列一个方程，求出第四个点坐标，然后代入相应函数关系式亦可，本质上是一样的。比如例题中设 C 点坐标后列方程求出 D 的横纵坐标，均用 m 表示，然后再代入直线 AB 所在函数关系式可求出相应 m。从而求出 C,D 两点坐标。

题型 2.已知两点（一线）两线，求两线上的两点与已知两点构成平行四边形。

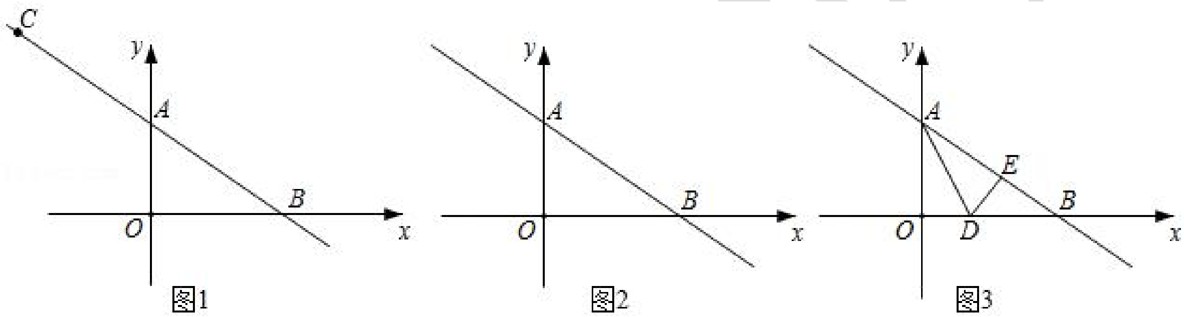
如下图，已知 A,B 两点坐标，在直线 m 和直线 n 上分别找一点与 A,B 两点构成平行四边形，则以 AB 为对角线和以 AB 为边为分类标准，情况可能不止一种，需要依据题目条件进行检验。



实战例题 2

（21 年洪山区八下期末 24 题）

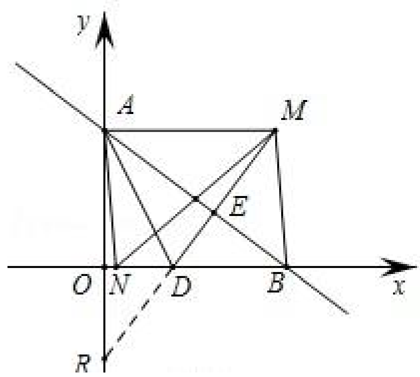
1．（12 分）如图 1，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，直线 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 分别交 x、y 轴于点 B、A．



（1）如图 1，点 C 是直线 AB 上不同于点 B 的点，且 $CA=AB$．则点 C 的坐标为 ______；

（2）点 C 是直线 AB 外一点，满足∠BAC＝45°，求出直线 AC 的解析式；

（3）如图 3，点 D 是线段 OB 上一点，将△AOD 沿直线 AD 翻折，点 O 落在线段 AB 上的点 E 处，点 M 在射线 DE 上，在 x 轴的正半轴上是否存在点 N，使以 M、A、N、B 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．



解析：（3）存在，如右图，平行四边形 $AMBN$ 以 AB 为对角线，延长 ED 交 y 轴于点 R，设 $OD=r$，

由折叠得，∠AED＝∠AOD＝90°，$ED=OD$，

∴$ED=r$，$ED\perp AB$；

∵$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$AE=AO=3$，

∴$BE=5-3=2$，

∵$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$，且 $S_{\triangle AOD}+S_{\triangle ABD}=S_{\triangle AOB}$，

∴ $\frac{1}{2}\times3r+\frac{1}{2}\times5r=6$，

解得 $r=\frac{3}{2}$,

∴$ED=OD=\frac{3}{2}$,

∴D（$\frac{3}{2}$，0）;

∵$\angle DOR=\angle DEB=90^\circ$，$\angle ODR=\angle EDB$，

∴$\triangle ODR\cong\triangle EDB$（$ASA$），

∴$RO=BE=2$，

∴R（0，-2），

设直线 DE 的解析式为 $y=px-2$，

则 $\frac{3}{2}p-2=0$，解得 $p=\frac{4}{3}$,

∴$y=\frac{4}{3}x-2$;

∵点 N 在 x 轴上，且 $AM\parallel BN$，

∴$AM\parallel x$ 轴，

∴点 M 与点 A 的纵坐标相等，都等于 3，

当 $y=3$ 时，由 $\frac{4}{3}x-2=3$，得 $x=\frac{15}{4}$,

∴M（$\frac{15}{4}$，3），

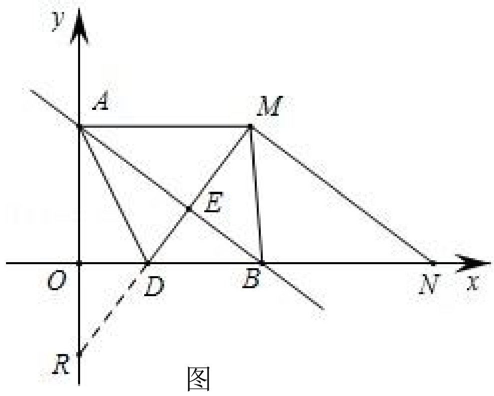
∵$BN=AM=\frac{15}{4}$,

∴$ON=4-\frac{15}{4}=\frac{1}{4}$,

∴N（$\frac{1}{4}$，0）;

如右图，平行四边形 $ABNM$ 以 AB 为一边，则 $AM\parallel x$ 轴，

且 $AM=BN=\frac{15}{4}$.



图

∵$ON=4+\frac{15}{4}=\frac{31}{4}$,

∴N（$\frac{31}{4}$，0），

综上所述，点 N 的坐标为（$\frac{1}{4}$，0）或（$\frac{31}{4}$，0）.

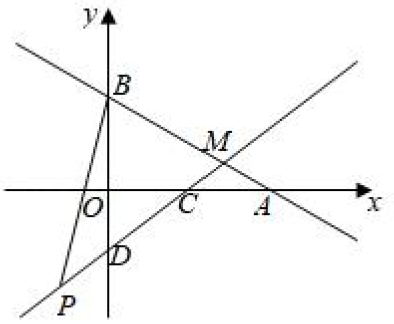
题型 3. 特殊平行四边形：矩形、菱形、正方形

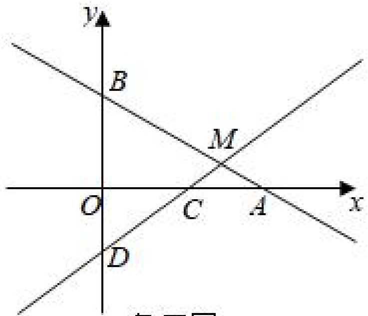
解决含有矩形、菱形、正方形问题时需要借助图形的特殊性质（比如矩形对角线相对，菱形对角线互相垂直等）获得相关的数量关系，或转化为直角三角形，等腰三角形然后利用方程等解决。

实战例题 3:

（21 年武昌区八下数学期末 24 题）

2.（12 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 AB：$y=-\frac{1}{2}x+3$ 与直线 CD：$y=kx-2$ 相交于点 M（4，a），分别交坐标轴于点 A，B，C，D．





备用图

（1）求 a 和 k 的值；

（2）如图，点 P 是直线 CD 上的一个动点，当△PBM 的面积为 20 时，求点 P 的坐标；

（3）直线 AB 上有一点 F，在平面直角坐标系内找一点 N，使得以 BD 为一边，以点 B，D，F，N 为顶点的四边形是菱形，请直接写出符合条件的点 N 的坐标．

解析：（1）

$a=1$，$k=\frac{3}{4}$；

（3）第一步列点：设点 F 的坐标为（m，$-\frac{1}{2}m+3$），点 N（a，b），

由（1）知，点 B、D 的坐标分别为（0，3）、（0，－2），

则 $BD=5$，

当 BD 是边时，

当点 F 在点 N 的上方时，则 $BD=BF$，即 $5^2=m^2+(-\frac{1}{2}m)^2$，

解得 $m=\pm 2\sqrt{5}$，

则点 F 的坐标为（$2\sqrt{5}$，$-\sqrt{5}+3$）或（$-2\sqrt{5}$，$\sqrt{5}+3$）

点 N 在点 F 的正下方 5 个单位，

则点 N（2 $\sqrt{5}$，$-\sqrt{5}-2$）或（﹣2 $\sqrt{5}$，$\sqrt{5}-2$）；

当点 F 在点 N 的上方时，则 $BD=DF$，

即 $5^2=m^2+\left(-\frac{1}{2}m+3+2\right)^2$，

解得 $m=0$（舍去）或 4，

同理可得，点 N（4，6）；

综上，点 N 的坐标为（2 $\sqrt{5}$，$-\sqrt{5}-2$）或（﹣2 $\sqrt{5}$，$\sqrt{5}-2$）或（4，6）．

针对训练：

（21 年硚口区八年级期末 24 题第二问）

1．（12 分）直线 l_1：$y=x-3$ 交 x 轴于 A，交 y 轴于 B．

（1）求 AB 的长；

（2）如图 1，直线 l_1 关于 y 轴对称的直线 l_2 交 x 轴于点 C，直线 l_3：$y=\frac{1}{2}x+b$ 经过点 C，点 D、T 分别在直线 l_2、l_3 上．若以 A、B、D、T 为顶点的四边形是平行四边形，求点 D 的坐标；

（3）如图 2，平行 y 轴的直线 $x=2$ 交 x 轴于点 E，将直线 l_1 向上平移 5 个单位长度后交 x 轴于 M，交 y 轴于 N，交直线 $x=2$ 于点 P．点 F（t，t^2）在四边形 $ONPE$ 内部，直线 PF 交 OE 于 G，直线 OF 交 PE 于 H，求 GE（$ME+HE$）的值．

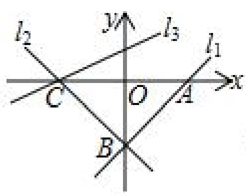


图 1

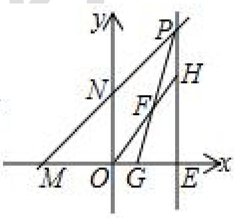


图 2