一.脚拉脚模型的构图特征

所谓的脚拉脚模型，是与手拉手模型相对应的一种几何构图特征.在我们学习手拉手模型的时候，通俗的，把等腰三角形的两个顶角顶点称之为“手”，两个底角顶点称之为“脚”.把两个几何模型做一下对比：

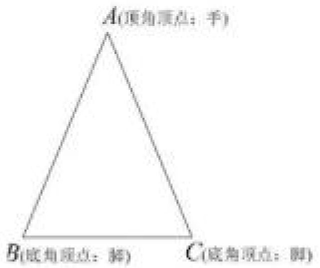
相同点-基本前提：两个等腰三角形

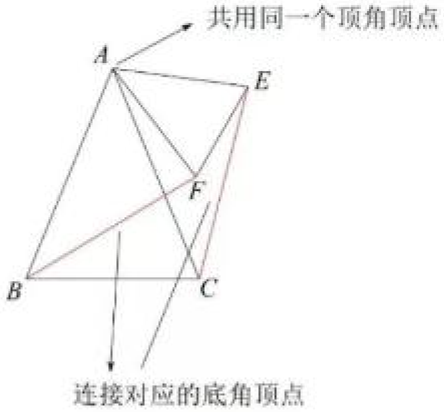
不同点-连接方式：

①手拉手模型：两个顶角度数**相等**的等腰三角形共用一个**顶角**顶点，并连结对应的底角顶点.

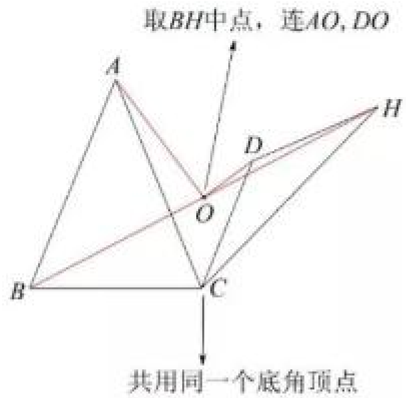
②脚拉脚模型：两个顶角度数**互补**的等腰三角形共用一个**底角**顶点，并连结剩下的那组底角顶点同时取其中点，再将中点与其余两个顶角顶点进行连结.

（注意：“手”和“脚”的说法只是为了方便好记的通俗说法，并不是公认的官方说法）





$\triangle ABC$与$\triangle AFE$为顶角度数相等的等腰三角形，
$\angle BAC=\angle FAE$
构成了“手拉手模型”，
也称之为共顶点的等腰三角形



$\triangle ABC$与$\triangle CDH$为顶角度数互补的等腰三角形，
$\angle BAC+\angle CDH=180°$
构成了“脚拉脚模型”，

二.脚拉脚模型的基本结论

我们把一类构图称之为几何模型的原因在于，只要满足一定的条件，其他次要条件无论如何变换，一定会有不变的结论蕴含在图形当中.在上图所展示的脚拉脚模型示意图中，无论$\angle BAC$取多少度，均有以下结论：

① $\angle AOD=90°$

②在线段 AO 与 DO 中，较长的线段长度与较短的线段长度的比值等于互补角中较小角的一半的正切值

在这个图中，即表现为：$\dfrac{AO}{DO}=\tan\dfrac{\angle BAC}{2}$

结论①中 90°恒成立，但是结论②往往会因为给出的条件与图示的不同，而产生一些变化，在八年级我们尚未学到三角函数，所以条件常常给的都是一些特殊角，比如：30°，60°，90°，120°等等，所以中点与两顶点线段长度的比值，往往是一些特殊数字，比如 1，$\sqrt{3}$.在这里一定要根据已知条件做判断，切忌死记结论.

三.脚拉脚模型的八上证法—中线倍长

脚拉脚模型的证明方法比较固定，一般分为以下几步：

（一）利用中点证明平行八字全等，进而得到等边与平行的条件

（二）通过分析相等的边长找到要证明的那一组旋转全等，再利用平行的条件进行角度计算，得到两边中间的夹角相等.(这里是难点)

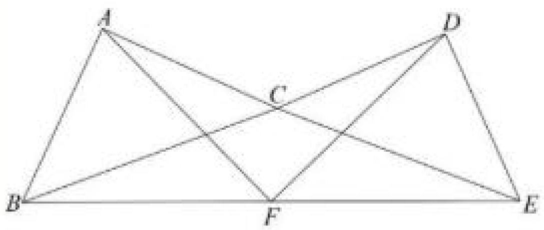
（三）证明这组旋转全等，得到一个新的等腰三角形

（四）利用等腰三角形的三线合一，得到我们想要的最终结论

这里我们选取一题作为例题，做一个详细的解剖，宋体字作为解题过程，楷体字作为思路分析,右侧为实时分步绘制的图像.

已知：如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CED$ 为等腰直角三角形，F 为 BE 的中点，连接 AF、DF.

证明：$AF \perp DF$，且 $AF = DF$.



证明：

（一）利用中点证明平行八字全等，进而得到等边与平行的条件：中点是我们做这一类题的突破口，因为通过中点进行的倍长中线可以得到旋转全等，从而实现条件的位移与转换.

延长 AF 至点 H，使得 AF=HF, 连 AD，DH，EH

∵F 为 BE 的中点

∴BF=EF

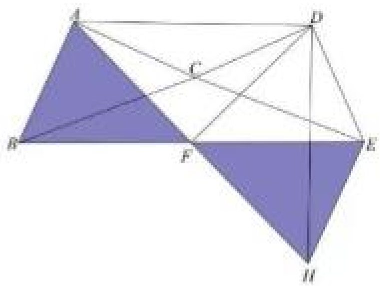
在$\triangle AFB$ 和$\triangle HFE$ 中

$$\begin{cases} AF = HF \\ \angle AFB = \angle HFE \\ BF = EF \end{cases}$$

∴ $\triangle AFB \cong \triangle HFE(SAS)$

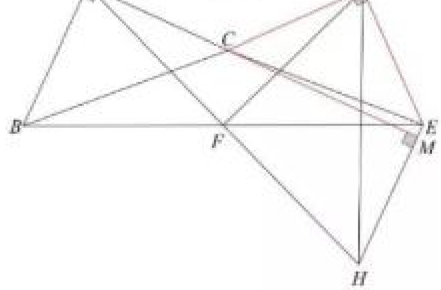
∴AB=AC=HE,$\angle BAF$=$\angle AHE$

∴ $AB /\!/ EF$



（二）这个时候我们得到了第一组全等，分析已有的条件发现，已知 AC=AB=EH,DC=DE,在三角形 ACD 与$\triangle HED$ 中，已经有了两条相等的边，可以尝试着看能否证明全等，倘若能得到全等，就意味着$\triangle ADH$ 为等腰三角形，那么作为中点的 F 自然就会成为 DF 与 AH 的垂足.已知两边相等，第三边是我们要证明的全等，那么剩下的路就很唯一了，那就是证明中间那个夹角相等，即证明$\angle DCA$=$\angle DEH$. 这里证明角相等是难点，一定要利用好第一组全等中得到的平行线的条件.这里提供两种思路.

思路一：通过某些线段与平行线产生三线八角，再利用已知的两个顶角 90 度，构成四边形或者八字模型.



延长 AC 交 EH 于 M

∵ $AB /\!/ EF$

∴$\angle BAM$=$\angle AMH$=90°

又∵$\angle CDE$=90°

∴在四边形 $CDEM$ 中，$\angle CDE$+$\angle EMC$=180°

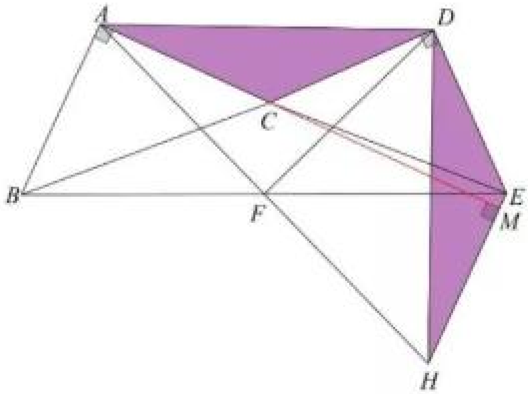
∴$\angle DCM$+$\angle DEM$=180°

∴$\angle DCA$=$\angle DEH$

小技巧：如何快速的找到需要延长的线？第一可以尝试等腰三角形中剩下的那个没被使用过的“腰”，比如这个题当中等腰三角形 ABC 中，倍长的全等已经用了 AB，AC 没有被使用，可以尝试延长.第二在其他的题目当中，可以尝试延长平行线.这里一定要通过具体的图形多动手尝试.

（三）有了角相等，剩下的全等也就水到渠成了.

在$\triangle DCA$和$\triangle DEH$中



$$\begin{cases} DC = DE \\ \angle DCA = \angle DEH \\ CA = EH \end{cases}$$

∴ $\triangle DCA \cong \triangle DEH$

∴ $DA=DH$, $\angle ADC=\angle HDE$

又∵ $\angle CDE=90°$

∴ $\angle ADH=\angle CDE=90°$

∴$\triangle ADF$为等腰直角三角形

（四）有了等腰直角三角形后，切不可盲目乐观认为结论就出来了，一定要再利用三线合一等手段详细的证明，并且注意，三线合一不能直接得到$AF=DF$，需要计算角度.

又∵F为AF中点

∴$AF\perp DF$，即$\angle AFD=90°$

又∵ $\angle DAH=\dfrac{90°}{2}=45°$

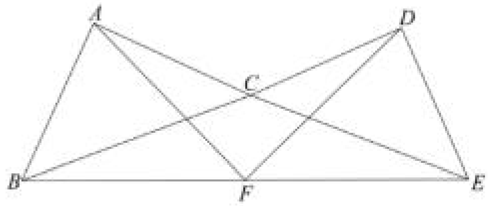
∴ $\angle ADF=\angle DAH=90°-45°=45°$

∴$AF=DF$

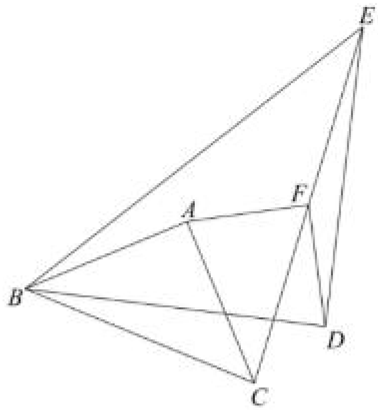
（注意：有的时候题目给的条件是30°，那么需要“利用30°所对的直角边为斜边的一半”，得到2倍的关系，无论是45°还是30°，一定要把条件说清楚，不能囫囵吞枣般的糊弄过去.）

一.基础脚拉脚

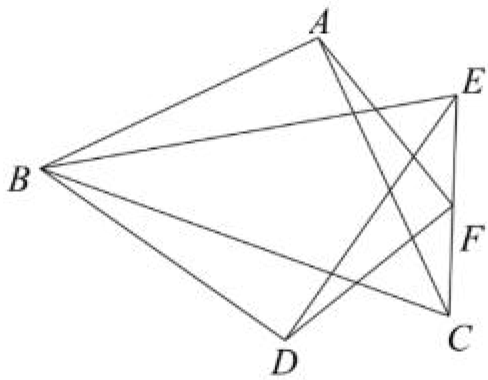
1.如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CED$ 为等腰直角三角形，F 为 BE 的中点，连接 AF、DF，证明：$AF\perp DF$，且 $AF=DF$.



2.如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle BED$ 为等腰直角三角形，F 为 CE 的中点，连接 AF、DF，证明：$AF\perp DF$，且 $AF=DF$.

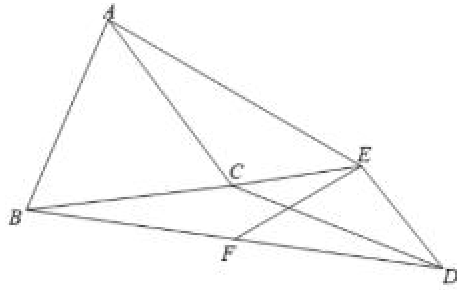


3.如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle BED$ 为等腰直角三角形，F 为 CE 的中点，连接 AF、DF，证明：$AF\perp DF$，且 $AF=DF$.

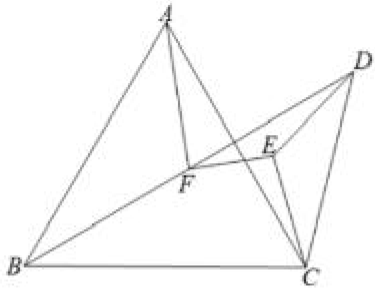


二.互补脚拉脚

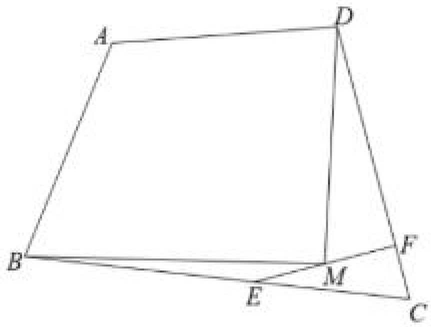
4.如图，$AB=AC$，$CE=DE$，且$\angle BAC=60°$，$\angle CED=120°$，F为BD的中点，求证：$\angle AEF=60°$，且$AE=2EF$.



5.如图，$AB=AC$，$CE=DE$，且$\angle BAC=60°$，$\angle CED=120°$，F为BD的中点，求证：$AF\perp EF$

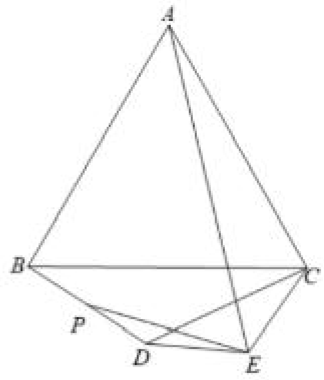


6.如图，在四边形$ABCD$中，$\angle A+\angle C=180°$，E、F分别在BC、CD上，且$AB=BE, AD=DF$，M为EF的中点，求证：$DM\perp BM$.

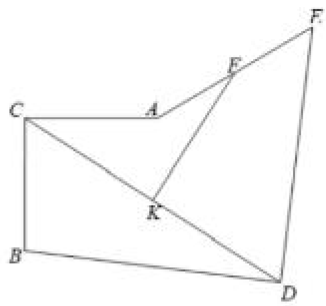


三.脚拉脚中结论变形

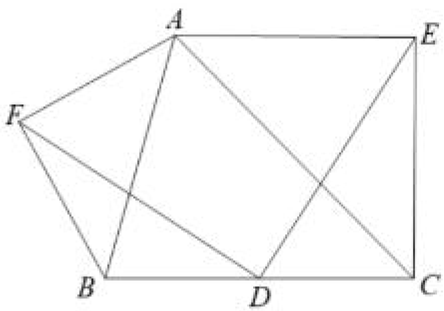
7.如图，$AB=AC$，$\angle ABC=\beta$，$CE=ED$，$\angle CED=2\beta$，点 P 为 BD 的中点，连接 AE、PE，当 $\beta=60°$ 时，求 $\dfrac{AE}{PE}$.



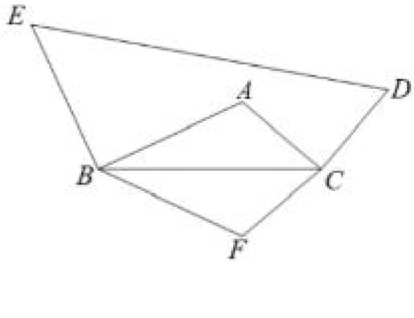
8.如图，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，$BD=ED$，$\angle BDE=90°$，点 K 为 CD 的中点，点 F 为 AE 的中点，连接 FK，求证：$CD=2FK$.



9.如图，$\triangle ABC$ 中，分别以 AB、AC 为斜边向外作等腰 $RT\triangle ABF$ 和等腰 $RT\triangle ACE$，D 为 BC 中点，连接 DF、ED，求证：$S_{五边形AFBCE}=DF^2$



10.如图，在$\triangle ABC$ 中，BC=8，BC 边上的高为 3，将点 A 绕点 B 逆时针旋转 90° 得到点 E，绕点 C 顺时针旋转 90° 得到点 D，沿 BC 翻折得到点 F，从而得到一个凸五边形 $BFCDE$，则五边形 $BFCDE$ 的面积为________（提示：不要局限用脚拉脚思考）

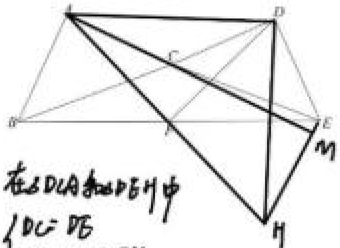


参考答案：

基础模型补充练习题（一）

一.基础脚拉脚

1.如图，△*ABC* 和△*CED* 为等腰直角三角形，*F* 为 *BE* 的中点，连接 *AF*、*DF*，证明：*AF*⊥*DF*，且 *AF*=*DF*.



证：延长AF至H点，使AF=HF，连AD、DH、EH

∵F为BE的中点

∴BF=EF

在△AFB和△HFE中

$\begin{cases} AF=HF \\ \angle AFB=\angle HFE \\ BF=EF \end{cases}$

∴△AFB≌△HFE(SAS)

∴AB=AC=HE

∠BAF=∠AHE

∴AB∥EH

延长AC交EH于M点

∴AB∥MH

∴∠BAM=∠AMH=90°

又∵∠CDE=90°

∴在四边形CDEM中

∠CDE+∠EMC=180°

∴∠DCM+∠DEH=180°

∴∠DCA=∠DEH

在△DCA和△DEH中

$\begin{cases} DC=DE \\ \angle DCA=\angle DEH \\ CA=EH \end{cases}$

∴△DCA≌△DEH(SAS)

∴DA=DH ∠ADC=∠HDE

又∵∠CDE=90°

∴∠ADH=∠CDE=90°

∴△ADH为等腰直角三角形

又∵F为AH中点

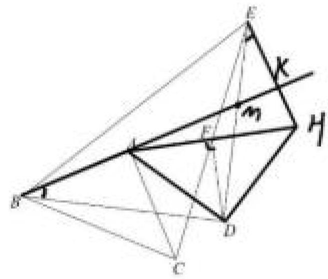
∴AF⊥DF

又∵∠DAH=(180°−90°)÷2=45°

∴∠ADF=∠DAH=45°

∴AF=DF

2.如图，△*ABC* 和△*BED* 为等腰直角三角形，*F* 为 *CE* 的中点，连接 *AF*、*DF*，证明：*AF*⊥*DF*，且 *AF*=*DF*.



证：延长AF至H点，使AF=FH，连接AD、HD、EH.

∵F为CE的中点，

∴CF=EF

在△AFC和△HFE中

$\begin{cases} AF=HF \\ \angle AFC=\angle HFE \\ CF=EF \end{cases}$

∴△AFC≌△HFE(SAS)

∴AC=HE ∠HAC=∠AHE

∴AC∥EH

延长BA交EH于K点 交ED于M

∵AC∥EH

∴∠BAC=∠BKH=90°

∵∠BDE=90°

且∠BMD=∠EMK

∴∠MBD=∠DEH

在△ABD和△HED中

$\begin{cases} AB=HE \\ \angle ABD=\angle HED \\ BD=ED \end{cases}$

∴△ABD≌△HED(SAS)

∴AD=HD ∠ADB=∠HDE

又∵∠BDE=90°

∴∠ADH=∠BDE=90°

∴△ADH为等腰直角三角形

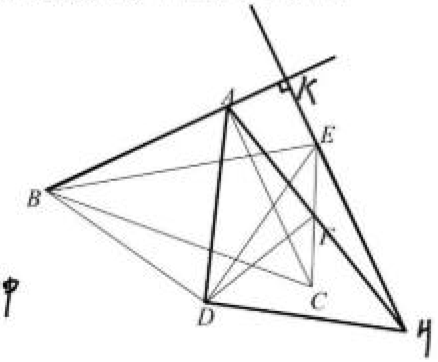
又∵F为AH中点，

∴AF⊥FD FD平分∠ADH

∴∠FAD=∠ADF=45°

∴AF=FD

3.如图，△*ABC* 和△*BED* 为等腰直角三角形，*F* 为 *CE* 的中点，连接 *AF*、*DF*，证明：*AF*⊥*DF*，且 *AF*=*DF*.



证：延长AF到H点，使FH=AF，连AD.DH,EH

∵F为CE的中点，

∴AF=FH

在△AFC和△HFE中

$\begin{cases} AF=HF \\ \angle AFC=\angle HFE \\ FC=FE \end{cases}$

∴△AFC≌△HFE(SAS)

∴AC=EH ∠FAC=∠FHE

∴AC∥EH

延长AE BA交于K点，

∵AC∥EH

∴∠AKE=∠BAC=90°

∴在四边形BKED中

∠BKE+∠BDE=180°

∴∠KBD+∠KED=180°

∴∠ABD=∠DEH

在△ABD和△HED中

$\begin{cases} AB=HE \\ \angle ABD=\angle HED \\ BD=ED \end{cases}$

∴△ABD≌△HED(SAS)

∴AD=HD ∠BDA=∠EDH

∴∠BDE=∠ADH=90°

∴△ADH为等腰直角三角形

∵F为AH中点

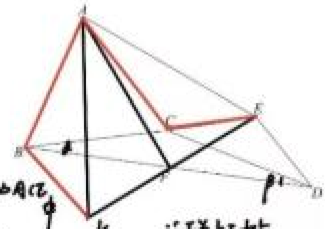
∴AF⊥DF DF平分∠ADH

∴∠DAF=∠ADF=45°

∴AF=DF

二.互补脚拉脚

4.如图，*AB*=*AC*，*CE*=*DE*，且∠*BAC*=60°，∠*CED*=120°，*F* 为 *BD* 的中点，求证：∠*AEF*=60°，且 *AE*=2*EF*.



证明：延长EF至K点，使EF=FK，连BK,AK,AE

∵F为BD的中点

∴BF=DF

在△BFK和△DFE中

$\begin{cases} BF=DF \\ \angle BFK=\angle DFE \\ KF=EF \end{cases}$

∴△BFK≌△DFE(SAS)

∴BK=ED ∠BKF=∠FED

∴BK∥DE

设∠CBD=α ∠CDB=β

∴∠EDF=β+30°

∴∠FBK=β+30°

∴∠ABK=90°+α+β

∵∠BCD=180°-α-β

∠ACB+∠ECD=90°

∴∠ACE=90°+α+β

∴∠ACE=∠ABK

在△ABK和△ACE中

$\begin{cases} AB=AC \\ \angle ABK=\angle ACE \\ BK=CE \end{cases}$

∴△ABK≌△ACE(SAS)

∴AK=AE ∠BAK=∠CAE

∴∠KAE=∠BAC=60°

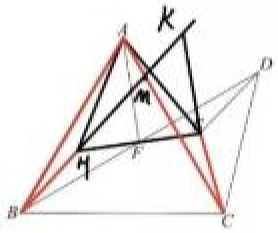
∴△AKE为等边三角形

∵F为KE中点

∴AF⊥EF 且EF=$\frac{1}{2}$AK

∴EF=$\frac{1}{2}$AE 即AE=2EF

5.如图，$AB=AC$，$CE=DE$，且$\angle BAC=60°$，$\angle CED=120°$，F为BD的中点，求证：$AF\perp EF$



证明：延长EF到H点，使HF=EF，连AH BH AE

∵F为BD的中点

∴HF=EF

在△HFB和△EFD中

$\begin{cases} HF=EF \\ \angle HFB=\angle EFD \\ FB=FD \end{cases}$

∴△HFB≌△EFD (SAS)

∴BH=DE ∠BHF=∠DEF

∴BH∥DE

延长BH CE交于K点，与AC交于M

∵BK∥DE

∴∠BKE=∠KED=60°

又∵∠BAC=∠BKC=60°

且∠AMB=∠KMC

∴∠ABH=∠ACE

在△ABH和△ACE中

$\begin{cases} AB=AC \\ \angle ABH=\angle ACE \\ BH=CE \end{cases}$

∴△ABH≌△ACE (SAS)

∴AH=AE，∠BAH=∠CAE

又∵∠BAC=60°

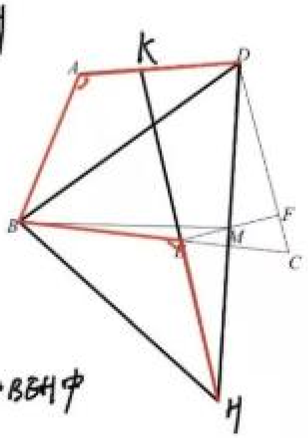
∴∠HAE=60°

∴△HAE为等边三角形

∵F为HE中点

∴AF⊥FE

6.如图，在四边形$ABCD$中，$\angle A+\angle C=180°$，E、F分别在BC、CD上，且$AB=BE$, $AD=DF$，M为EF的中点，求证：$DM\perp BM$.



证明：延长DM至H点，使DM=HM，连BD.BH EH

∵M为EF的中点

∴FM=EM

在△DMF和△HME中

$\begin{cases} DM=MH \\ \angle DMF=\angle HME \\ FM=EM \end{cases}$

∴△DMF≌△HME (SAS)

∴EH=DF ∠DFM=∠HEF

∴EH∥DF

延长HE交AD于K点，

∵KH∥CD

∴∠KEB=∠C=180°-∠A

∴∠A+∠KEB=180°

∴∠A=∠BEH

在△BAD和△BEH中

$\begin{cases} BA=BE \\ \angle A=\angle BEH \\ AD=EH \end{cases}$

∴△BAD≌△BEH (SAS)

∴BD=BH

∴△BDH为等腰三角形

又∵M为DH中点，

∴BM⊥DH

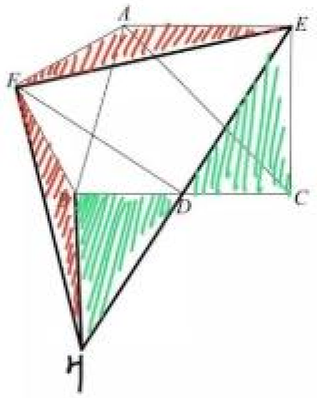
9.如图，$\triangle ABC$ 中，分别以 AB、AC 为斜边向外作等腰 $RT\triangle ABF$ 和等腰 $RT\triangle ACE$，D 为 BC 中点，连接 DF、ED，求证：$S_{五边形AFBCE}=DF^2$

① $\triangle EDC \cong \triangle HDC$ (SAS)

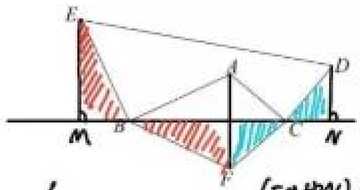
② $\triangle FAE \cong \triangle FBH$ (SAS)

$\therefore S_{五边形AFBCE}=S_{\triangle FEH}=\dfrac{EH\cdot FD}{2}$

$=\dfrac{2DF\cdot DF}{2}=DF^2$



10.如图，在$\triangle ABC$ 中，BC=8，BC 边上的高为 3，将点 A 绕点 B 逆时针旋转 90° 得到点 E，绕点 C 顺时针旋转 90° 得到点 D，沿 BC 翻折得到点 F，从而得到一个凸五边形 $BFCDE$，则五边形 $BFCDE$ 的面积为 __5__（提示：不要局限用脚拉脚思考）



$S_{五边形BFCDE}=S_{梯形EMND}=\dfrac{(EM+DN)(MN)}{2}$

$=\dfrac{BC\cdot MN}{2}$

$=\dfrac{8\cdot(8+8)}{2}$

$=56$

总结:

脚拉脚模型（共底角顶点的等腰三角形）的证明模式非常固定，通过上面的答案我们会发现脚拉脚模型的证明过程大致分为四部分：

（一）利用中点证明平行八字全等，进而得到等边与平行的条件

（二）通过分析相等的边长找到要证明的那一组旋转全等，再利用平行的条件进行角度计算，得到两边中间的夹角相等。

（三）证明这组旋转全等，得到一个新的等腰三角形

（四）利用等腰三角形的三线合一，得到我们想要的最终结论