

数轴：

数轴，一种特定的几何图形。

本质上已经规定了，当我们看到数轴的时候，首先应当想到的是数轴的“轴”，也就是它的几何含义。

但是，在日常的教学与学习中，我们看到数轴时，第一想法是数轴上的“数”。这就导致了学生在看到与数轴有关的题目时会先想数轴上的数字，当题目稍微复杂一点，就会两眼昏花，不知所想。就不会想到这些题目该如何下手。

所以，我们不妨考虑一下，古人为什么会创造数轴，是谁想出来这个东西的，他想用数轴来做什么？当我们知道了这些问题的答案，理解与应用数轴就方便多了。

相传，有一次笛卡尔生病卧床，仍然在反复思考一个问题：能不能用直观的几何图形来表示抽象方程？几何图形是由点、线、面组合而成，方程通常是由数和代数组成，如何使几何里的点与方程里的数产生联系，是这里的关键。在深思中，他突然看见屋顶角上有一只正来来回回拉着丝织网的蜘蛛。蜘蛛的“表演”，使笛卡尔灵机一动，他把蜘蛛假想为一个点，那么，是否可以用一组数来表示蜘蛛在蛛网上的位置呢？

此时，他观察到屋子的墙角，每一个墙角都是由三条射线相交而成，而墙角就可以作为这三条射线的起点，因此，可以用这三条射线定义三个方向（上、右、前），那么屋子中任意一点的位置就都可以用这三个方向的交点来表示了，然后再过这个交点分别对三个方向的直线作垂线，分别交于三个方向于一点，此时，是不是可以用这三个点来表示这个位置呢？而直线上的点又可以用数来表示，因此，可以用三个数的组合来表示屋中任一点的位置，反过来，任意给三个数，例如 3、2、1，也可以用来表示三个方向轴上的点。于是在蜘蛛的启示下，笛卡尔创建了直角坐标系。

笛卡尔坐标系在一维中的应用就是数轴，其实看完这个故事，再想想老师标出来的笛卡尔思考的问题，老师之前提出的问题也就会迎刃而解，其实数轴的作用就是让我们拥有一个可以将数字、字母、代数式等复杂的数学公式，变成在纸张上绘画的一个点或者一条线的转换工具。如果以你自己为原点，也就是零点，那么站在地面上，你可以创造出很多数轴，来表示你与其它物体（花盆，垃圾桶，床）之间的距离（如果你无法知道具体的数值，可以随使用一个字母，也就是未知数来表示）。

而距离这种东西，通常会有远近之分，用代数的想法考虑，就是“>”“<”。再想一想，如果你站在地面不动，那么你与其它物体的距离会保持不变，可是我们不可能不走动，不可能站在一个地方站一辈子，所以，以你为原点的数轴会发生变化，这个时候，当你重新站在地面上的其他位置时，你又可以创造出其它的数轴。这也就是数学问题中的，你经常遇到的考虑 x 的取值范围问题。

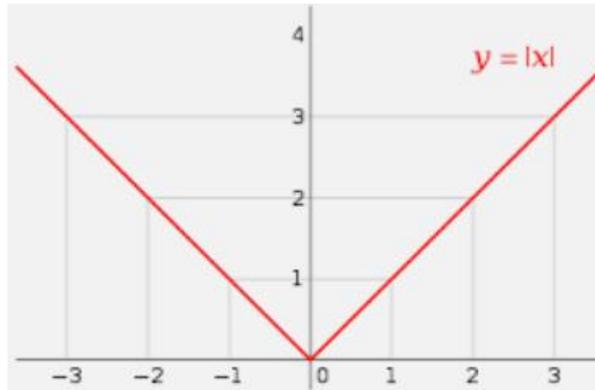
你看，说比大小也好，求取值范围也好，问你 x 未知数存不存在也好，求出一个定值也好，只要与数轴有关的，我们都可以自己定义个数轴（原点，正方向，单位长度），将题中给出的某些定值理解为地面上的花瓶、水桶、墙面、床（当然，他们都在一条直线上），把你想象成原点或者题中给出的 x 未知数，你在这个数轴上前后移动自己的位置，不就可以得到题目让你求的那个具体数值（具体位置）和具体范围（具体距离）了。

但是，距离都是正数，数轴上总会有正数与复数的存在，那么我们该怎么表示具体的距离呢？总不能让一个正数和一个负数相加，说这是他们俩之间的距离吧，这明显小于他们俩之间的距离对不对。这时，另一个工具出来了，那就是绝对值，有了它，就可以很好的表示两个数之间的距离了！

绝对值：

绝对值是指一个数在数轴上所对应点到原点的距离，用“ $| |$ ”来表示。

如果说我们用一个横轴表示要取绝对值的所有的数，即，数轴，用另一条数轴表示这些数取了绝对值以后的数。我们会得到这样一个类似于倒三角的折线图。



这里面，横轴就是所有的取值 x ，数轴我们用一个字母 y 来代替，这条红线就表示所有的 x 的绝对值。这条横线上的每一个点到横轴的距离，就代表横轴上相应的点到达 0 的距离。

说简单一点，“ $|□-□|$ ”这种形式的代数式，就表示两个 $□$ 之间的距离，这两个 $□$ 里面是什么都可以，就算是 $|□-|□-|□-□||$ 或者 $||□-|□-□||-□|$ 都无所谓，我们只要提取出最外侧的两个“ $|$ ”，和里面的一个“-”，剩余“-”左边和右边就是“ $|□-□|$ ”中的两个 $□$ 。这样，再遇到“ $|□-□|$ ”这种形式的东西，我们就能轻易的知道，它表示两个 $□$ 之间的距离了。

知道它的涵义，怎么做题呢？

这里，我们将绝对值和数轴联合起来，用绝对值和数轴的几何意义考虑所有与绝对值有关的题目。

首先是定值距离，就是一个数到原点或者到某一个数的定值距离。

举例 1:

下列各组判断中，正确的是()

A. 若 $|a|=b$ ，则一定有 $a=b$

B. 若 $|a|>|b|$ ，则一定有 $a>b$

C. 若 $|a|>b$ ，则一定有 $|a|>|b|$

D. 若 $|a|=b$ ，则一定有 $a^2=(-b)^2$

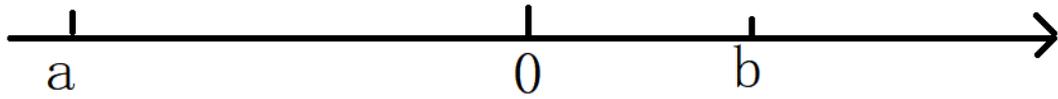
解析：像这种题目，单纯一个 $|a|$ 里面别的数字没有，就说明，它想考你这个数字在 0 的左边还是右边，因为这个 $|a|$ 就是 a 到 0 的距离。

A 选项， a 不知道是在 0 左边还是右边，但是 $|a|$ 一定是大于等于 0 的，说明， b 一定在 0 的右边，所以，如果当 $a>0$ ，A 正确，如果 $a<0$ ，A 错误。因为没有给 a 额外的条件，无法判断 a 的具体位置，所以 A 选项错误。用图形表示就是（右为正方向）

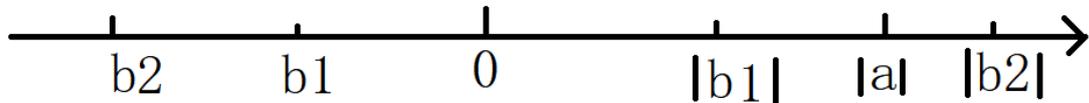


B 选项，我只能知道， a 与 0 的距离要大于 b 与 0 的距离，但是我不知道 a 在 0 左边还

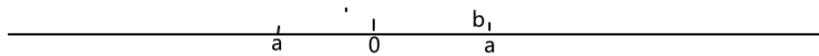
是右边， b 在 0 左边还是右边，就会出现下图这种情况。这时 a 虽然距离 0 最远，但是 a 的数值是负的，一定小于 b 。所以 **B** 错误。



C 选项，这种选项是最让学生头疼的，因为它一个绝对值，一个不是绝对值，容易乱，这种情况下，我们就先把绝对值的那边画出来，然后再考虑非绝对值的部分。根据选项，我们画出如下图，这个时候，我们就表示出来 $|a|$ 与 b 的关系了，此时， b 如果都在左边，会出现 $|b_1|$ 小于 $|a|$ 的 b_1 ，还会出现 $|b_2|$ 大于 $|a|$ 的 b_2 ，此时，就会有 $|a| < |b|$ ，所以 **C** 不正确。



D 选项，画图和 **A** 选项一样，这个时候，无论 a 和 b 距离 0 多远，任何一个非零数的平方都是大于 0 的，当它们与 0 距离一样，他们的平方值也都是相等的，因为 $-b$ 的平方与 b 的平方数值一样，相当于负号不起作用了。所以 **D** 正确。



举例 2:

$$|x-a|+|x-b|$$

$$|x-a|-|x-b|$$

求最大值；最小值；或者让该式等于一个数，求 x 的范围；或者不等于一个数，求 x 的范围。

这种题型，第一步画出一个数轴，找到 a 点和 b 点。第二步观察这个式子，

如果两个绝对值做加法，就代表任取数轴上一个点，该式的值等于这个点到 a 和 b 两点距离之和。

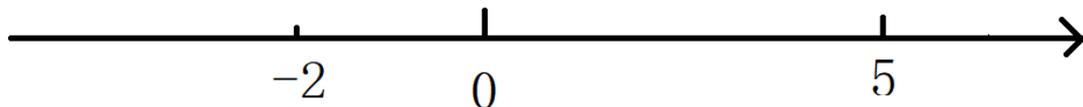
如果两个绝对值做减法，就代表任取数轴上一个点，该式的值等于这个点到 a 和 b 两点距离之差。

例题 2:

$$|x-5|+|x|+|x+2|<15$$

像这种没给要求，那就是求 x 的值或者范围，因为这种情况下， x 无非就是一个数，或者在数轴上一段范围。

第一步画出数轴，标出数值 5 ， 0 ， -2 。

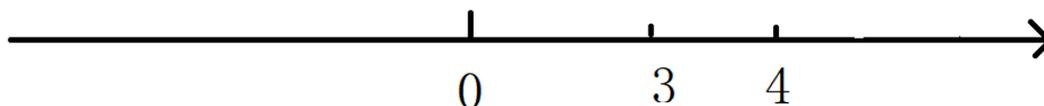


第二步，观察题目，题目给出的是 x 到 0 ， -2 ， 5 三个点之间举例的和，首先我们让点 x 落在 -2 左侧，我们会发现，当 $x < -4$ 时， $|x-5|+|x|+|x+2| > 15$ ，所以 $x > -4$ ，然后我们再让 x 落在 -2 与 -5 之间，我们会发现， $7 < |x-5|+|x|+|x+2| < 12$ ，符合题目要求，最后，再让 x 落在 5 右边，我们会发现， $x > 6$ 时， $|x-5|+|x|+|x+2| > 15$ ，说明， x 的取值范围是 $-4 < x < 6$ 。

例题 3: (等式就是用“=”连接的式子, 不等式就是用 $>$, $<$, \geq , \leq 连接的式子) (无解, 就以位置, x 没有取值, x 在数轴上面找不到)

若不等式 $|x-4|+|3-x|<a$ 无解, 求 a 的取值范围。

第一步: 画数轴, 标出 4 和 3



第二步, 看题中给的式子表示的涵义, $|x-4|+|3-x|$ 表示 x 与 3 和 4 的距离之和。这道题目让 $|x-4|+|3-x|<a$ 无解, 说明 $|x-4|+|3-x|\geq a$ 有解, 说明我们要找 $|x-4|+|3-x|$ 最小值, 只要最小值比 a 大, 就能让 $|x-4|+|3-x|$ 有解。假设一下, $|x-4|+|3-x|>3$ 有解, $3>a$, $a=2.9$, 那么 $|x-4|+|3-x|>2.9$ 是不是一定会有解 (多想一想) (换个思路, 老师问我能拿出来几个苹果, 但是你比老师先一步问我, 能不能拿出来 3 个苹果, 我说可以, 这个时候老师来了, 老师问我能不能拿出来 2.9 个苹果。我都能拿出来 3 个苹果, 我凭什么不能拿出 2.9 个苹果呢?) 所以这道题当 x 落在 3 和 4 之间的时候, $|x-4|+|3-x|$ 取得最小值 1, 这个时候, 只要 $a\leq 1$, x 一定无解, 因为没办法再找出来一个 x 可以让 $|x-4|+|3-x|$ 小于 1 的了。