

## 2020-2021 学年度九年级元月调考几何压轴题解析

九年级元月调考刚刚过去，从出题形式来说主要还是常见的和常考的题型，用到的方法在元调备考中我们都反复讲过，所以相对来说比较容易。我们来看一看

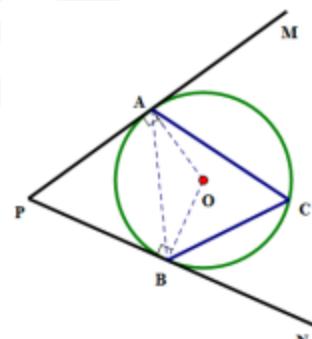
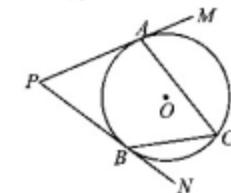
## 1. 选择题压轴

9. 如图， $PM, PN$  分别与  $\odot O$  相切于  $A, B$  两点， $C$  为  $\odot O$  上一点，连接  $AC, BC$ 。若  $\angle P=60^\circ$ ,  $\angle MAC=75^\circ$ ,  $AC=\sqrt{3}+1$ ，则  $\odot O$  的半径是（ ）
- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\frac{3}{2}$       D.  $\frac{3}{4}\sqrt{3}$
- 

解析：此题涉及到的知识点有圆的切线，圆周角，圆心角，方法技巧用到含特殊角的非特殊三角形的辅助线做法以及特殊三角形三边关系。

题目告知切点为  $A, B$  故可连接  $OA, OB$ ，如右图，

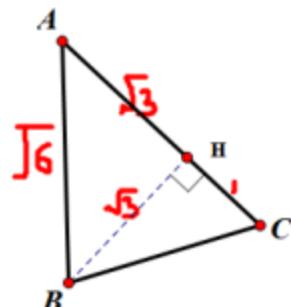
由切线性质可知  $\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$ ，又  $\angle P=60^\circ$ ，所以由四边形内角和可得  $\angle AOB=120^\circ$ ， $\triangle AOB$  是一个常见的特殊三角形，三边关系是已知的



同时由同弧所对圆心角圆周角关系可得  $\angle ACB=60^\circ$ ，又  $\angle MAC=75^\circ$ ，可得  $\angle ABC=75^\circ$ ，那么  $\triangle ABC$  就是一个含特殊角的非特殊三角形，这类三角形的常见做法就是作高线构造直角三角形，并利用特殊角得到相应的边，或利用勾股定理得到方程后解方程再得边。继续看，我们将其单独画出来，如图：

$\angle A=45^\circ$ ，过  $B$  作  $BH \perp AC$  于  $H$ ，设  $HC=a$ ，由特殊直角三角形三边关系和  $AC=\sqrt{3}+1$  我们最后可以得到  $AB=\sqrt{6}$

再回到上图，可得半径为  $\sqrt{2}$

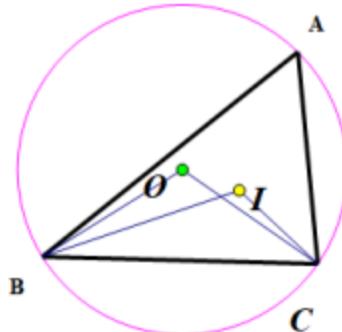


## 2. 填空题压轴

14. 已知  $O, I$  分别是  $\triangle ABC$  的外心和内心， $\angle BOC = 140^\circ$ ，则  $\angle BIC$  的大小是 \_\_\_\_\_.

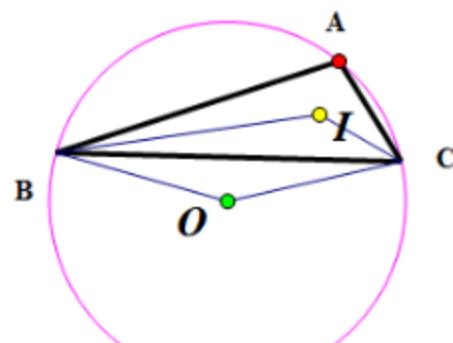
解析：注意到此题没有给出图，所以暗示可能含多种情况。这个题型在考前反复给我的学生讲过三次，所以基本上做对了。

此题主要用到两个关系，一个是同弧所对圆周角等于圆心角一半，另一个是涉及内心（角平分线交点）的  $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$ ，这个是个常见常考模型，同类型下还有几个结论。如图。



$$\angle BOC = 2\angle A, \text{ 所以 } \angle A = 70^\circ, \text{ 所以 } \angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2} \times 70^\circ = 125^\circ, \text{ 另}$$

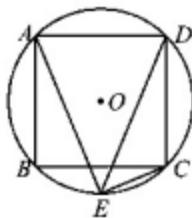
一种情况是当外心  $O$  在三角形外，即  $\triangle ABC$  为钝角三角形时，如图



$$\text{同理可得 } \angle BIC = 145^\circ$$

## 三. 解答题中几何证明和计算

21. (本小题满分 8 分)

如图, 正方形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,  $E$  是  $BC$  的中点, 连接  $AE$ ,  $DE$ ,  $CE$ .(1) 求证:  $AE=DE$ ;(2) 若  $CE=1$ , 求四边形  $AECD$  的面积.

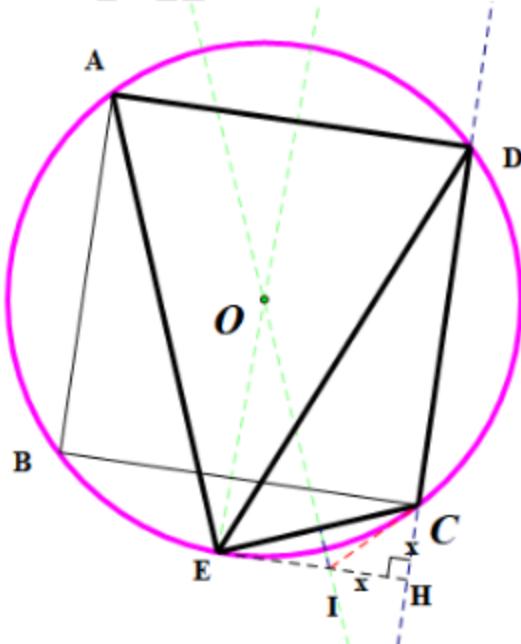
解析: 好多年这个题第一问多是考查证明相切, 第二问主要是考查由相切, 垂径定理和勾股定理以及方程等知识的综合运用, 求线段长度或图形面积。今年题型没变, 但考查方式发生了, 第一问利用弦对应弧相等即可解决, 非常简单。第二问有两种思路, 但都比较常见。

(1)  $E$  为弧  $BC$  中点, 所以弧  $ABE$ =弧  $DCE$ , 所以  $AE=ED$ 

(2) 思路一: 常规计算, 要有较强的计算能力。主要考虑到由题目条件可得  $\angle EDC=22.5^\circ$ ,  $\angle DEC=45^\circ$ , 所以  $\triangle ECD$  为一含特殊角的非直角三角形, 这类三角形问题主要是作垂线。

如图, 过  $E$  点作  $EH$  垂直于  $DC$  所在直线于  $H$ , 因为  $\angle EDC=22.5^\circ$ ,  $\angle DEC=45^\circ$ , 所以  $\angle ECH=67.5^\circ$ ,  $\angle CEH=22.5^\circ$ , 作  $EC$  的中垂线交  $EH$  于  $I$ , 则  $IC=IE$ , 且  $\triangle CIH$  为等腰直角三角形, 设  $IH=x$ , 则  $HC=x$ ,  $IC=\sqrt{2}x$ ,  $EH=(\sqrt{2}+1)x$ , 由勾股定理可得关于  $x$  的方程, 经计算可得  $x^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$  (此处不要着急求  $x$  值), 此时  $CD=AD=2EH$ ,

所以:

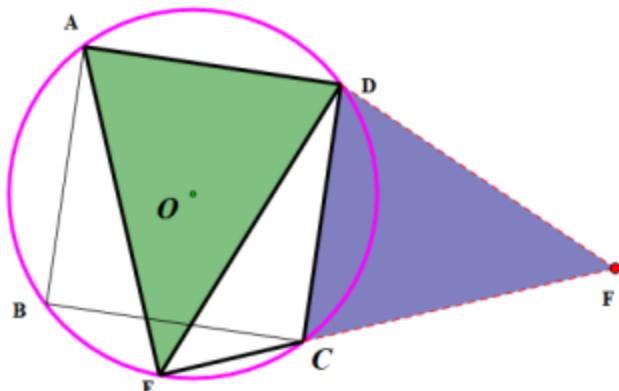


$$\begin{aligned} S_{\text{四边形 } AECD} &= S_{\triangle AED} + S_{\triangle ECD} = \frac{AD \cdot DH}{2} + \frac{CD \cdot EH}{2} = \frac{1}{2} AD(DH + EH) = EH \cdot (DH + EH) \\ &= EH \cdot (2EH + x + EH) = (10 + 7\sqrt{2}) \cdot x^2 \\ &= \frac{3}{2} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

思路二：考虑到 DA 与 DC 是共端点的等线段，且夹角为定角，所以可以考虑旋转，如图：

将  $\triangle ADE$  绕点 D 逆时针方向旋转  $90^\circ$  到  $\triangle DCF$  处，因为  $\angle DAE + \angle DCE = 180^\circ$ ，所以  $\angle DCE + \angle DCF = 180^\circ$ ，所以 E, C, F 三点共线，又  $\angle DEC = 45^\circ$ ，所以  $\triangle DEF$  为等腰直角三角形，所以  $\sqrt{2} GF = CF + EC$ ，设  $DF = x$ ，则  $\sqrt{2} x = x + 1$ ，可以求出  $x = \sqrt{2} + 1$ ，最后求出等腰直角三角形 DEF 的面积即可。结论同思路一。

总结：比较可知 1 相对容易想到，但计算量大，2 不太容易想到，但想到确实又很简单，在平时的训练中我们既要掌握好基础知识，还要提高自己的计算能力和分析能力。



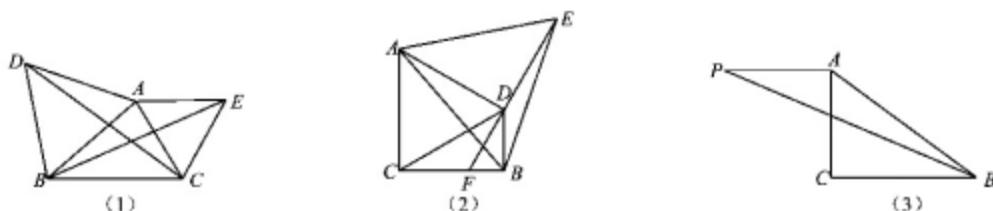
#### 四. 解答题中几何压轴题

23. (本小题满分 10 分)

**问题背景** 如图(1)， $\triangle ABD$ ， $\triangle AEC$  都是等边三角形， $\triangle ACD$  可以由  $\triangle AEB$  通过旋转变换得到，请写出旋转中心、旋转方向及旋转角的大小。

**尝试应用** 如图(2)，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，分别以  $AC$ ， $AB$  为边，作等边  $\triangle ACD$  和等边  $\triangle ABE$ ，连接  $ED$ ，并延长交  $BC$  于点  $F$ ，连接  $BD$ 。若  $BD \perp BC$ ，求  $\frac{DF}{DE}$  的值。

**拓展创新** 如图(3)，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ，将线段  $AC$  绕点  $A$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到线段  $AP$ ，连接  $PB$ ，直接写出  $PB$  的最大值。

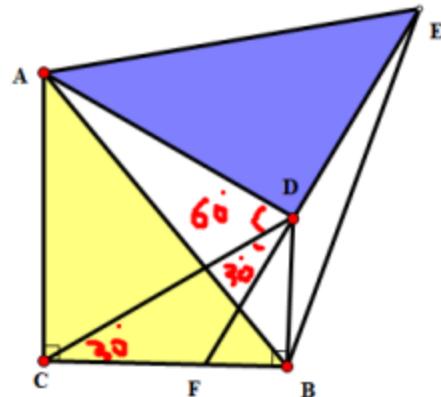


解析：1. 如果此问不能解答基本上是没得什么办法了，省略。

2. 很明显此题考的是手拉手模型，我们可看到此类问题是常年考，无论是期考还是中考，基本上都有考，但是很多学生还是不能完全解答。这类题有固定的模型，只要不是太刁钻古怪，基本上不会太难。废话不多说 哈

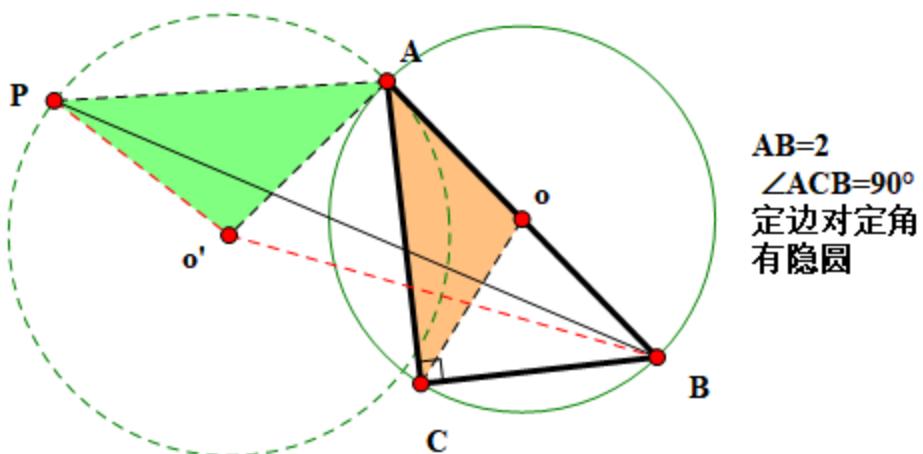
$\triangle ACB$  与  $\triangle ADE$  全等，而且  $\angle EFB = \angle EAB = \angle CAD = 60^\circ$ ，  
这是这类模型最基本的 2 个结论，而此题刚好用到，如右图：

黄蓝两三角形全等（证明略），所以  $DE = CB$ ，设  $FB = 1$ ，则  
 $BD = \sqrt{3}$ ,  $FD = 2$ ,  $CB = 3$ ，所以  $\frac{DF}{DE} = \frac{2}{3}$



3. 此问分析过程我不再阐述，具体可参考 2020 年 11 月份发布的期中考试中关于隐圆与最值的分析文章，[点击附件下载即可](#)。

解题与分析过程看下图



主动点为 C 轨迹为圆，猜想从动点为 P 轨迹也为圆，去找从动点 P 所在圆  
心  $O'$ ,  $BO' = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$   
所以 PB 最大值为  $\sqrt{5} + 1$