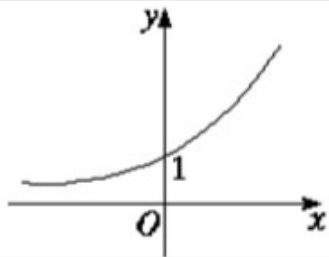
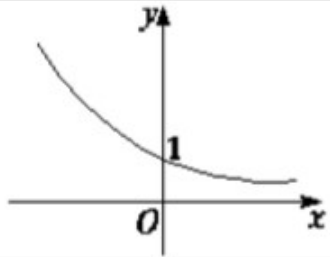


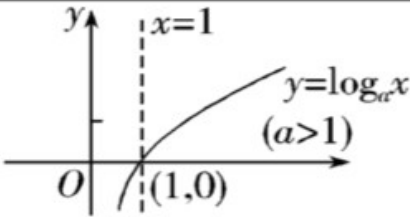
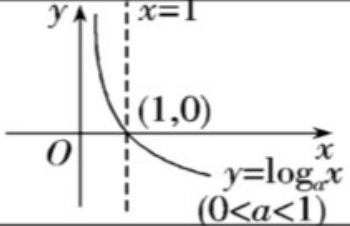
专题一、函数图像及性质

1.1 指数函数、对数函数、幂函数的图像及性质

指数函数

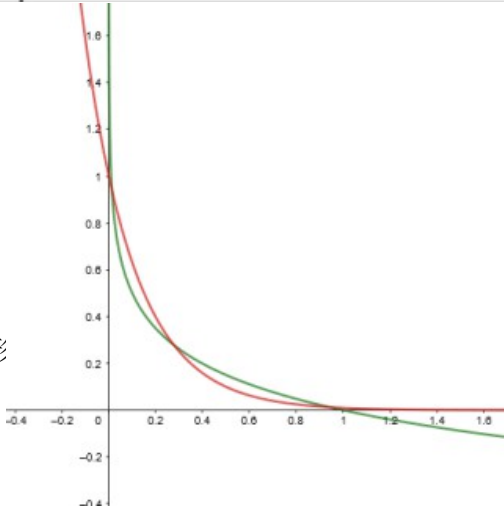
	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象		
性质	(1) 定义域: $\mathbb{R}$	
	(2) 值域: $(0, +\infty)$	
	(3) 过点 $(0, 1)$, 即 $x = 0$ 时, $y = 1$	
	(4) 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数	(4) 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数

对数函数

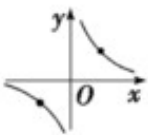
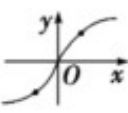
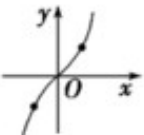
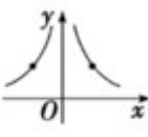
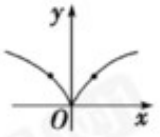
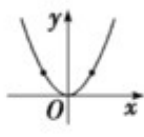
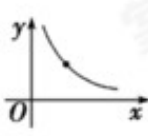
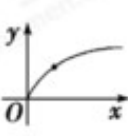
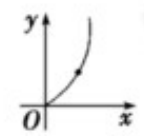
图象		
性质	定义域: $x > 0$, 值域: $y \in \mathbb{R}$	
	当 $x = 1$ 时, $y = 0$, 即恒过定点 $(1, 0)$	
	在 $(0, +\infty)$ 上是增函数; 当 $x > 1$ 时, $y \in (0, +\infty)$; 当 $0 < x < 1$ 时, $y \in (-\infty, 0)$	在 $(0, +\infty)$ 上是减函数; 当 $x > 1$ 时, $y \in (-\infty, 0)$; 当 $0 < x < 1$ 时, $y \in (0, +\infty)$

指数函数与对数函数的关系: 互为反函数

对于幂函数, 中学阶段仅研究幂为有理数的情形



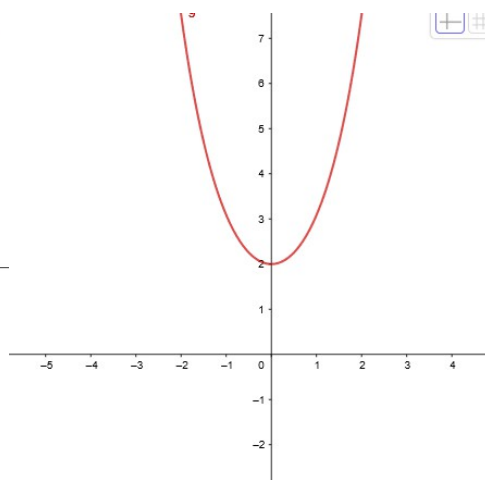
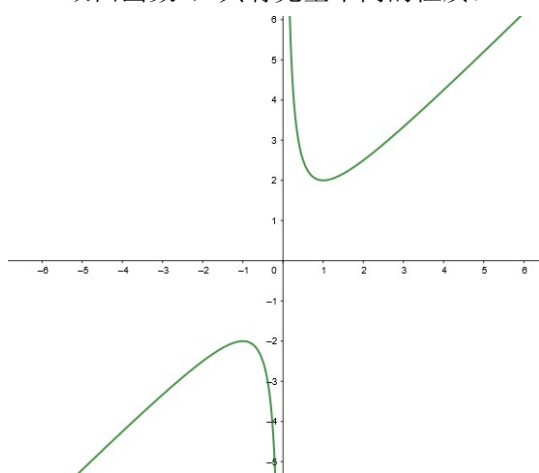
幂函数 $y = x^a (a = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{N}^*, \frac{q}{p} \text{ 为最简分式})$ 的图象

$a = \frac{q}{p}$	$a < 0$	$0 < a < 1$	$a > 1$
p, q 都是奇数			
p 为奇数 q 为偶数			
p 为偶数 q 为奇数			

1.2 反比例函数及双曲线的一些性质

(对钩函数)，是一个奇函数，图像如下：

双曲线，具有完全不同的性质：



对钩函数与不等式联系密切：对于一类不等式问题可以用该函数的性质求解：

1.3 函数图像与不等式、函数恒成立问题

1.3.1 函数图像与零点的关系、函数图像与不等式的关系

1.3.2 函数恒成立问题

恒成立与存在性问题知识点梳理

- 1、恒成立问题的转化：恒成立；
- 2、能成立问题的转化：能成立；
- 3、恰成立问题的转化：在 M 上恰成立的解集为 M
另一转化方法：若在 D 上恰成立，等价于在 D 上的最小值，若在 D 上恰成立，则等价于在 D 上的最大值。
- 4、设函数 $f(x)$ ，对任意的 $x \in D$ ，存在 $y \in M$ ，使得 $f(x) = y$ ，则
- 5、设函数 $f(x)$ ，对任意的 $x \in D$ ，存在 $y \in M$ ，使得 $f(x) = y$ ，则

-
- 6、设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，存在 x_0 ，使得 $f(x_0) > g(x_0)$ ，则
- 7、设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，存在 x_0 ，使得 $f(x_0) < g(x_0)$ ，则
- 8、若不等式 $f(x) > g(x)$ 在区间 D 上恒成立，则等价于在区间 D 上函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)$ 的图象上方；
- 9、若不等式 $f(x) < g(x)$ 在区间 D 上恒成立，则等价于在区间 D 上函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)$ 的图象下方；

题型一、常见方法

- 1、已知函数 $f(x)$ ，其中 $x \in D$ ，
- (1) 对任意 $x \in D$ ，都有 $f(x) > a$ 成立，求实数 a 的取值范围；
- (2) 对任意 $x \in D$ ，都有 $f(x) < a$ 成立，求实数 a 的取值范围；
- 2、已知两函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，对任意 $x \in D$ ，存在 $x_0 \in D$ ，使得 $f(x_0) > g(x)$ ，则实数 m 的取值范围为_____

题型二、主参换位法(已知某个参数的范围，整理成关于这个参数的函数)

- 1、对于满足的所有实数 p ，求使不等式恒成立的 x 的取值范围。

题型三、分离参数法（欲求某个参数的范围，就把这个参数分离出来）

- 1、当时，不等式恒成立，则 a 的取值范围是_____。

题型四、数形结合（恒成立问题与二次函数联系（零点、根的分布法））

- 2、已知函数 $f(x)$ ，在 D 上有 $f(x) > a$ ，求实数 a 的取值范围。

题型五、不等式能成立问题（有解、存在性）的处理方法

若在区间 D 上存在实数使不等式成立，则等价于在区间 D 上；
若在区间 D 上存在实数使不等式成立，则等价于在区间 D 上的。

- 1、存在实数 x ，使得不等式有解，则实数 a 的取值范围为_____。

专题二、复合函数和换元法

如果是 $y=f(u)$ 的函数，而 $u=g(x)$ 又是 x 的函数，即 $y=f(g(x))$ ，那么关于 x 的函数叫做函数 f 和 g 的复合函数，叫做中间变量。

1、求定义域 因为多层复合映射结构复杂，所以使得求复合函数定义域的题型形式多样，现列举主要题型如下。

- (1) 已知复合函数的表达式，求复合函数的定义域。

将已知复合函数正确地拆成几个常见的简单函数，根据使函数解析式有定义的要求，由外到内，列出所有限制条件对应的不等式，所得不等式组的解集就是复合函数的定义域。

- ①求函数的定义域。

解：要使函数有意义，须满足

(使根式有意义)，

(使对数有意义)，

(使对数有意义)，

解得或，

故所求函数的定义域为。

- (2) 已知函数的定义域，求复合函数的定义域。

因为代表同一映射，只需用代换法则，先将原函数的定义域写成的不等式，再将换成中间变量，解得不等式即可。

- ②已知函数的定义域是 A ，求函数 $y=f(g(x))$ 的定义域。

解：由题设知， $g(x) \in A$ ，即

，或，

故函数的定义域是

。

- (3) 已知复合函数的定义域，求外层函数的定义域。

实质是从已知复合函数中的取值范围，求出这个复合函数的中间变量的范围（或内层函数的值域）。

- ③已知函数的定义域是 A ，求函数的定义域。

解：由得，

，
故函数的定义域是。

2、求函数表达式 中学阶段，求复合函数表达式大致可归纳为两种题型，一是已知各层子函数的映射法则，求复合函数的表达式；二是已知复合函数适合的函数方程，求复合函数的表达式。

(1) 已知中间变量，求复合函数

用代换法则像求函数值一样，从内向外逐次将内层函数的表达式，代换外层函数的自变量解出。每次代换只看一层，只代换一个中间变量。函数的映射法则是对自变量单定义的，故复合函数的表达式最终也须将表达式用单的运算表示。

④已知函数，求函数的表达式。

解：，

(2) 已知复合函数，求原函数

关键是沟通中间变量与复合函数表达式间的映射关系，找到原函数，用中间变量的整体作自变量的映射法则，常用配凑法、换元法、待定系数法等。

⑤已知，求。

解：令，则，所以；

，，即，

故，。

(3) 已知复合函数适合的函数方程，求复合函数的表达式

中学只涉及简单的函数方程，因此，关键是将所求复合函数看作未知变量，根据函数方程的结构特征，采用代换方法建立方程组，消元解之。

⑥已知，其中，为奇数，求函数。

解：由题意可知，令，由于为奇数，故有

；

结合已知条件，可解得，

又因为，为奇数，故。

(4) 已知复合函数，求与外层函数映射法则相同的另一复合函数

先由已知的复合函数求原函数，再由原函数求另一复合函数。

⑦已知，求函数。

解：设，则，有，

；

故。

3、求值域 在复合函数定义域内，先求出最内层函数的值域，再用它作为中间函数的“自变量”，求出中间函数值域，依次外推直至求出最外层函数的值域。

⑧求函数，的值域。

解：，；

又是减函数，

故所求函数的值域是。

4、判断函数奇偶性 通常方法是根据奇偶性的定义进行判断，容易产生的一类负迁移是：认为构成复合函数的每层简单函数都要有奇偶性时，复合函数才有奇偶性，这是错误的。例如函数，可拆成，易知外层函数不具有奇偶性，但内层函数是偶函数，由定义可知是偶函数。

当复合函数各层子函数都有奇偶性时，可用下列法则判断它的奇偶性。

定理 当内层函数为偶函数时，复合函数为偶函数（此时可为任意函数），简记为“内偶则偶”。

定理 当内层函数为奇函数时，若外层函数为奇函数，则复合函数为奇函数；若外层函数为偶函数，则复合函数为偶函数，简记为“内奇外奇则为奇”、“内奇外偶则为偶”。

5、判断函数单调性 通常做法仍然是由函数单调性的定义判断，但若其中某层中间变量没有单调性时，则复合函数无单调性。只有复合函数的各层子函数在定义域上均为严

格单调函数时，复合函数才具有单调性，并可用下列法则判断复合函数的单调性。

定理 当，均为增函数时，则复合函数为增函数；当，均为减函数时，则复合函数为增函数，简记为“同向为增”。

定理 当为增函数，为减函数，或为减函数，为增函数时，则复合函数为减函数，简记为“异向为减”。

以上定理可推广至层复合函数，即：

定理 若有限次复合函数的每层子函数均有意义且严格单调，则减函数的层数为偶数时，复合函数为增函数；减函数的层数为奇数时，复合函数为减函数。

6、求函数周期性

(1) 由周期函数的定义易知，关键是最内层函数是否有周期性，当最内层函数为周期函数时，复合函数必为周期函数，但最小正周期可能改变。

例如函数，由，复合得到，内层函数为周期函数，，则仍为周期函数，但。

若外层函数为严格单调函数，内层函数是以为周期的函数，并且有最小正周期，则复合函数是周期函数，并且有最小正周期。

(2) 当内层函数无周期性，外层函数有周期性时，应由周期函数的定义判断。特殊情形可由下列定理判断：

定理 若外层函数是以为周期的函数，且则复合函数是周期函数，周期为。

定理 若外层函数为周期函数，且函数为偶函数，，则复合函数是周期函数。

7、求函数的最值

(1) 已知复合函数的表达式，求复合函数的最值

若外层函数是严格单调函数，内层函数有最值时，内层函数的最值点就是复合函数的最值点；若外层函数有最值时，外层函数的最值点就是复合函数的最值点。

若外层函数与内层函数都是严格单调函数时，复合函数的值域为开区间，则复合函数无最值；值域为闭区间，则复合函数既有最大值，也有最小值；值域为半开半闭区间，则复合函数只有最大值而无最小值，或只有最小值而无最大值。

⑨ 已知，求函数的最值。

解：

，

令，由知，

，

当时，；

当时，。

(2) 已知复合函数，求原函数的最值

先由复合函数求得原函数，再求原函数的最值。

⑩ 已知，求函数的最值。

解：令，则，于是得，

，；

即，

当时，；当时，因，故，

，且当时，；当时，。

8、求反函数 当复合函数的各层子函数均为严格单调函数时，有反函数。一般先逐层求出各层子函数的反函数，然后复合为原函数的反函数，或用穿脱原则从外到内依次取原映射的逆映射。注意由原函数的值域写出它的反函数的定义域。

例题 求函数的反函数。

解：，，故，

又，

故所求反函数为，。

三、复合函数的图象

作复合函数的图象一般都比较复杂，这里仅介绍用图象变换法作复合函数的图象。当复合函数可视为由常见的简单函数经过平移、伸缩、对称等变换得到时，可由简单函数

的图象施行图象变换作出复合函数的图象。

例题 作函数的图象。

解：原函数的图象可由函数的图象经过下列变换得到：

四、复合函数的符号语言

对复合函数的符号语言，应从函数定义与函数符号出发，准确理解，不可误读误写误用。

(1) 的区别

是简单函数的记号，而则为复合函数的记号，由，复合而成。

(2) 与的区别

由于复合映射不具有交换律，即，所以它们是两个不同的复合函数，不是同一个复合函数。因此与也不是同一个函数；比如,这里的表示函数值域中的任一个值，而，这里的却表示函数定义域中的任一个值。例如，；，。

(3) 的区别

函数是复合函数的反函数，它们的图象关于直线对称。而函数不是的反函数，它们的图象关于直线不对称，严格地说它们是关于中间变量成反函数关系，它们的图象应由外层函数的反函数关系，结合内层函数施行相应的几何变换或代数变换而得到。

例题 已知函数的图象过点，则函数的图象过点()。

错解：因函数的图象过点，而函数的图象可由函数的图象向左平移个单位得到，故的图象必过点，再由反函数定义知函数的图象必过点。

正解：因的图象过点，故的图象应过点，又的图象可由的图象向左平移个单位得到，所以的图象应由的图象向左平移个单位得到，故必过点。

专题三、抽象函数解题思路及综合运用

3.1

特殊模型	抽象函数
正比例函数 $f(x)=kx$ ($k \neq 0$)	$f(x+y)=f(x)+f(y)$
幂函数 $f(x)=x^n$	$f(xy)=f(x)f(y)$ [或]
指数函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)	$f(x+y)=f(x)f(y)$ [
对数函数 $f(x)=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)	$f(xy)=f(x)+f(y)$ [
正、余弦函数 $f(x)=\sin x$ $f(x)=\cos x$	$f(x+T)=f(x)$
正切函数 $f(x)=\tan x$	
余切函数 $f(x)=\cot x$	

3.2 利用抽象函数性质，解有关问题

1. 判断函数的奇偶性：

例 1 已知,对一切实数、都成立，且,求证为偶函数。

证明：令=0, 则已知等式变为……①

在①中令=0 则 $2=2 \therefore \neq 0 \therefore =1 \therefore \therefore$ 为偶函数。

2. 确定参数的取值范围

例 2：奇函数在定义域 $(-1, 1)$ 内递减，求满足的实数的取值范围。

解：由得， $\therefore$ 为函数， $\therefore$

又 $\because$ 在 $(-1, 1)$ 内递减, $\therefore$

3. 解不定式的有关题目

例3: 如果对任意的 x, y , 比较的大小

解: 对任意 x, y 有 $\therefore x^2 = y^2$ 为抛物线 $y = x^2$ 的对称轴

又 $\because$ 其开口向上 $\therefore (2)$ 最小, $(1) = (3) \therefore$ 在 $[2, +\infty)$ 上, 为增函数

$\therefore (3) < (4), \therefore (2) < (1) < (4)$

3.3 几类抽象函数的解法

1、线性函数型抽象函数

线性函数型抽象函数, 是由线性函数抽象而得的函数。

例4、已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y , 均有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, $f(-1) = -2$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的值域。

分析: 由题设可知, 函数 $f(x)$ 是 $y = kx, (k \neq 0)$ 的抽象函数, 因此求函数 $f(x)$ 的值域, 关键在于研究它的单调性。

解: 设 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, $\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, $\therefore f(x_2 - x_1) > 0$,
 $\therefore f(x_2) = f[(x_2 - x_1) + x_1] = f(x_2 - x_1) + f(x_1)$,
 $\therefore f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) > 0$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, $\therefore f(x)$ 为增函数。

在条件中, 令 $y = -x$, 则 $f(0) = f(x) + f(-x)$, 再令 $x = y = 0$, 则 $f(0) = 2f(0)$, $\therefore f(0) = 0$, 故 $f(-x) = f(x)$, $f(x)$ 为奇函数,
 $\therefore f(1) = -f(-1) = 2$, 又 $f(-2) = 2f(-1) = -4$,
 $\therefore f(x)$ 的值域为 $[-4, 2]$ 。

例5、已知函数 $f(x)$ 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 满足条件 $f(x) + f(y) = 2 + f(x+y)$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 2$, $f(3) = 5$, 求不等式 $f(a^2 - 2a - 2) < 3$ 的解。

分析: 由题设条件可猜测: $f(x)$ 是 $y = x + 2$ 的抽象函数, 且 $f(x)$ 为单调增函数, 如果这一猜想正确, 也就可以脱去不等式中的函数符号, 从而可求得不等式的解。解: 设 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, $\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 2$, $\therefore f(x_2 - x_1) > 2$, 则

$f(x_2) = f[(x_2 - x_1) + x_1] = f(x_2 - x_1) + f(x_1) - 2 > 2 + f(x_1) - 2 = f(x_1)$,

即 $f(x_2) > f(x_1)$, $\therefore f(x)$ 为单调增函数。 $\therefore$

$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) - 2 = [f(1) + f(1) - 2] + f(1) - 2 = 3f(1) - 4$, 又

$\because f(3) = 5, \therefore f(1) = 3. \therefore f(a^2 - 2a - 2) < f(1), \therefore a^2 - 2a - 2 < 1$, 即
 $a^2 - 2a - 3 < 0$, 解得不等式的解为 $-1 < a < 3$ 。

2、指数函数型抽象函数

例6、设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 满足条件: 存在 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 对任何 x 和 y , $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 成立。求:

(1) $f(0)$; (2) 对任意值 x , 判断 $f(x)$ 值的正负。

分析: 由题设可猜测 $f(x)$ 是指数函数 $y = a^x$ 的抽象函数, 从而猜想 $f(0) = 1$ 且 $f(x) > 0$ 。

解: (1) 令 $y = 0$ 代入 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, 则 $f(x) = f(x) \cdot f(0)$, $\therefore$

$f(x)[1 - f(0)] = 0$ 。若 $f(x) = 0$, 则对任意 $x_1 \neq x_2$, 有 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 这与题设矛盾, $\therefore f(x) \neq 0, \therefore f(0) = 1$ 。

(2) 令 $y = x \neq 0$, 则 $f(2x) = f(x) \cdot f(x) = [f(x)]^2 \geq 0$, 又由(1)知 $f(x) \neq 0, \therefore f(2x) > 0$, 即 $f(x) > 0$, 故对任意 $x, f(x) > 0$ 恒成立。

3、对数函数型抽象函数

对数函数型抽象函数，即由对数函数抽象而得到的函数。

例 7、设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调增函数，满足

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad f(3) = 1, \quad \text{求:}$$

(1) $f(1)$;

(2) 若 $f(x) + f(x$

$8) \leq 2$, 求 x 的取值范围。

分析: 由题设可猜测 $f(x)$ 是对数函数 $y = \log_3 x$ 的抽象函数, $f(1) = 0, f(9) = 2$ 。

解: (1) $\because f(3) = f(1 \times 3) = f(1) + f(3), \therefore f(1) = 0$ 。

(2) $f(9) = f(3 \times 3) = f(3) + f(3) = 2$, 从而有 $f(x) + f(x$

$8) \leq f(9)$,

即 $f[x(x-8)] \leq f(9)$, $\because f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 故

$$\begin{cases} x(x-8) \leq 9 \\ x > 0 \\ x-8 > 0 \end{cases}, \quad \text{解之得: } 8 < x \leq 9.$$