一. 教学内容：

双曲线

二. 重点、难点：

重点：双曲线的定义、方程、几何性质．掌握双曲线的标准方程的推导及标准方程．

难点：理解参数 a、b、c、e 的关系及渐近线方程．

三. 主要知识点

1、双曲线的定义：

平面内到两定点 F_1、F_2 的距离之差的绝对值等于常数（小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做双曲线. 这两个定点叫做双曲线的焦点，两焦点的距离叫做焦距.

说明：双曲线的定义用代数式表示为 $||MF_1|-|MF_2||=2a$，其中 $2a<|F_1F_2|$，这里要注意两点：

（1）距离之差的绝对值.

（2）$2a<|F_1F_2|$，这两点与椭圆的定义有本质的不同.

当 $|MF_1|-|MF_2|=2a$ 时，双曲线仅表示焦点 F_2 所对应的一支；

当 $|MF_1|-|MF_2|=-2a$ 时，双曲线仅表示焦点 F_1 所对应的一支；

当 $2a=|F_1F_2|$ 时，轨迹是一直线上以 F_1、F_2 为端点向外的两条射线；

当 $2a>|F_1F_2|$ 时，动点轨迹不存在.

2、标准方程的推导

（1）建系设点

建立坐标系应遵循简单和优化的原则，如使关键点的坐标、关键几何量（距离、直线斜率等）的表达式简单化，注意充分利用图形的对称性，使学生认识到下列选取方法是恰当的.

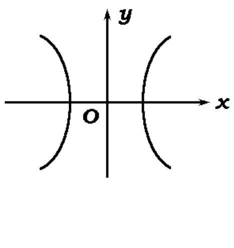
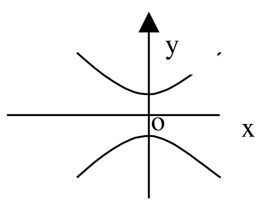
以两定点 F_1、F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系（如图）．设 $|F_1F_2|=2c$（$c>0$），M（x，y）为双曲线上任意一点，则有 F_1（$-c$，0），F_2（c，0）.

（2）点的集合

由定义得出椭圆双曲线集合为：$P=\{M||MF_1-MF_2|=2a\}$.

（4）化简方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（其中 $c^2=a^2+b^2$）

3、两种双曲线性质的比较

	焦点在 x 轴上的双曲线	焦点在 y 轴上的双曲线
几何条件	与两个定点的距离差的绝对值等于常数（小于这两个定点之间的距离）	
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0，b>0）	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$（a>0，b>0）
图形		EMBED Word.Picture.8 
范围	$\|x\|\geq a$	$\|y\|\geq a$
对称性	x 轴，y 轴，原点	

顶点 坐标	（±a，0）	（0，±a）
实轴 虚轴	x 轴，实轴长 2a y 轴，虚轴长 2b	y 轴，实轴长 2a x 轴，虚轴长 2b
焦点 坐标	（±c，0）c=$\sqrt{a^2+b^2}$	（0，±c）c=$\sqrt{a^2+b^2}$
离心率	e=$\frac{c}{a}$，　e >1	
渐近线	y=±$\frac{b}{a}$x	y=±$\frac{a}{b}$x

4、方法小结

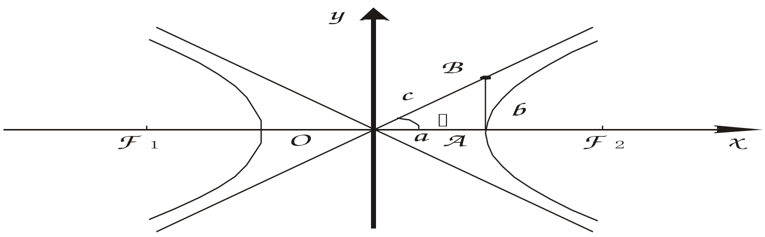
（1）由给定条件求双曲线的方程，常用待定系数法.首先是根据焦点位置设出方程的形式（含有参数），再由题设条件确定参数值，应特别注意：

① 当焦点位置不确定时，方程可能有两种形式，应防止遗漏；

② 已知渐近线的方程 bx±ay＝0，求双曲线方程，可设双曲线方程为 $b^2x^2-a^2y^2=\lambda$（λ≠0），根据其他条件确定 λ 的值.若求得 λ>0，则焦点在 x 轴上，若求得 λ<0，则焦点在 y 轴上.

（2）由已知双曲线的方程求基本量，注意首先应将方程化为标准形式，再计算，并要特别注意焦点位置，防止将焦点坐标和准线方程写错.

（3）双曲线中有一个重要的 Rt△OAB（如下图），它的三边长分别是 a、b、c．易见 $c^2=a^2+b^2$，若记∠AOB＝θ，则 e=$\frac{c}{a}=\frac{1}{\cos\theta}$.



（4）参数 a、b 是双曲线的定形条件，两种标准方程中，总有 a>0，b>0；双曲线焦点位置决定标准方程的类型；a、b、c 的关系是 $c^2=a^2+b^2$；在方程 $Ax^2+By^2=C$ 中，只要 AB<0 且 C≠0，就是双曲线的方程.

（5）给定了双曲线方程，就可求得确定的两条渐近线．但已知渐近线方程，只是限制了双曲线张口的大小，不能直接写出双曲线方程．但若已知渐近线方程是 $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$，则可把双曲线方程表示为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$（λ≠0），再根据已知条件确定 λ 的值，求出双曲线的方程.

准线方程：$x=\pm\frac{a^2}{c}$，准焦距：$p=\frac{b^2}{c}$，通径

$$d=2ep=2\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{b^2}{c}=\frac{2b^2}{a}$$

【模拟试题】（完成时间 60 分钟，满分 100 分）

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 到两定点 $F_1(-3,0)$、$F_2(3,0)$ 的距离之差的绝对值等于 6 的点 M 的轨迹是 （　　）

A. 椭圆　　B. 线段　　C. 双曲线　　D. 两条射线

2. 方程 $\frac{x^2}{1+k}+\frac{y^2}{1-k}=1$ 表示双曲线，则 k 的取值范围是 （　　）

A. $-1<k<1$　　B. $k>0$　　C. $k\geq 0$　　D. $k>1$ 或 $k<-1$

3. 双曲线 $\frac{x^2}{m^2+12}-\frac{y^2}{4-m^2}=1$ 的焦距是 （　　）

A. 4　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 8　　D. 与 m 有关

4. 设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$ 上一点，双曲线的一条渐近线方程为 $3x-2y=0$，F_1、F_2 分别是双曲线的左、右焦点.若 $|PF_1|=3$，则 $|PF_2|$ 等于

A. 1 或 5　　B. 6　　C. 7　　D. 9

5. （2005 年春季北京，5）“$ab<0$”是“曲线 $ax^2+by^2=1$ 为双曲线”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

6. 焦点为 $(0,6)$，且与双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 有相同的渐近线的双曲线方程是 （　　）

A. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{24}=1$　　B. $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{24}=1$　　C. $\frac{y^2}{24}-\frac{x^2}{12}=1$　　D. $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=1$

7. 若 $0<k<a$，双曲线 $\frac{x^2}{a^2-k}-\frac{y^2}{b^2+k}=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有 （　　）

A. 相同的虚轴　　B. 相同的实轴　　C. 相同的渐近线　　D. 相同的焦点

8. 过双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 左焦点 F_1 的弦 AB 长为 6，则 ΔABF_2（F_2 为右焦点）的周长是（　　）

A. 28　　B. 22　　C. 14　　D. 12

【试题答案】

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	C	C	C	B	D	A	B	D

【典型例题】

例1. 根据下列条件，求双曲线方程：

（1）与双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$有共同的渐近线，且过点（－3，$2\sqrt{3}$）；

（2）与双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$有公共焦点，且过点（$3\sqrt{2}$，2）.

（3）求中心在原点，两对称轴为坐标轴，并且经过P（3，$\frac{15}{4}$）Q（$\frac{16}{3}$，5）.

剖析：设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，求双曲线方程，即求a、b，为此需要关于a、b的两个方程，由题意易得关于a、b的两个方程.

解法一：（1）设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

由题意得$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4}{3}\\ \frac{(-3)^2}{a^2}-\frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2}=1\end{cases}$

解得$a^2=\frac{9}{4}$，$b^2=4$.

所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{4}=1$.

（2）设双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

由题意易求$c=2\sqrt{5}$.

又双曲线过点（$3\sqrt{2}$，2），

$\therefore\frac{(3\sqrt{2})^2}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$.

又∵$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2$，

∴$a^2=12$，$b^2=8$．

故所求双曲线的方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$．

解法二：（1）设所求双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\lambda$（$\lambda\neq0$），

将点（-3，$2\sqrt{3}$）代入得$\lambda=\frac{1}{4}$，

所以双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=\frac{1}{4}$．

（2）设双曲线方程为$\frac{x^2}{16-k}-\frac{y^2}{4+k}=1$，

将点（$3\sqrt{2}$，2）代入得 $k=4$，所以双曲线方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$．

评述：求双曲线的方程，关键是求 a、b，在解题过程中应熟悉各元素（a、b、c、e）之间的关系，并注意方程思想的应用.若已知双曲线的渐近线方程 $ax\pm by=0$，可设双曲线方程为 $a^2x^2-b^2y^2=\lambda$（$\lambda\neq0$）．与$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$同焦点的可设为$\frac{x^2}{a^2-k}-\frac{y^2}{b^2+k}=1$

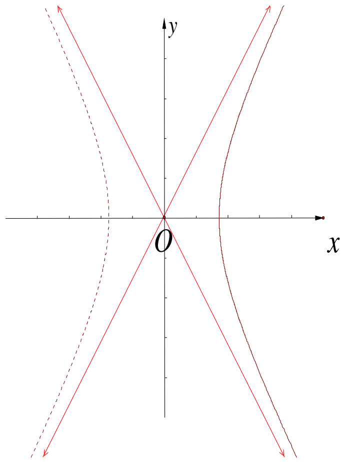
（3）设双曲线方程为$\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{n}=1$（$mn>0$）

将 PQ 两点坐标代入求得 $m=-16$，$n=-9$.

故所求方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

说明：若设$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$或$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$两种情况求解，比较繁琐.

例 2. △ABC 中，A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，B（-1，0），C（1，0），求满足 $\sin C-\sin B=\frac{1}{2}\sin A$ 时，顶点 A 的轨迹方程，并画出图形.



解： 根据正弦定理得 $c-b=\frac{1}{2}a=1$

即 AB－AC＝1，所以点 A 的轨迹为双曲线

又 c＝1，$a=\frac{1}{2}$，$\therefore b=c^2-a^2=\frac{3}{4}$

故双曲线方程为 $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$ （$x>\frac{1}{2}$）

例 3.设点 P 到点 M（－1，0）、N（1，0）距离之差为 2m，到 x 轴、y 轴距离之比为 2，求 m 的取值范围．

剖析： 由|PM|－|PN|＝2m，得||PM|－|PN||＝2|m|．知点 P 的轨迹是双曲线，由点 P 到 x 轴、y 轴距离之比为 2，知点 P 的轨迹是直线，由交轨法求得点 P 的坐标，进而可求得 m 的取值范围．

解： 设点 P 的坐标为（x，y），依题意得 $\frac{|y|}{|x|}=2$，即 $y=\pm 2x$（$x\neq 0$）．　　①

因此，点 P（x，y）、M（－1，0）、N（1，0）三点不共线，得||PM|－|PN||<|MN|＝2．

∵||PM|－|PN||＝2|m|>0，

∴0<|m|<1．因此，点 P 在以 M、N 为焦点，实轴长为 2|m|的双曲线上．

故 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{1-m^2}=1$．　　②

将①代入②，并解得 $x^2=\frac{m^2(1-m^2)}{1-5m^2}$，∵$1-m^2>0$，∴$1-5m^2>0$．

解得 $0<|m|<\frac{\sqrt{5}}{5}$，即 m 的取值范围为（$-\frac{\sqrt{5}}{5}$，0）∪（0，$\frac{\sqrt{5}}{5}$）．

评述： 本题考查了双曲线的定义、标准方程等基本知识，考查了逻辑思维能力及分析问题、解决问题的能力．解决此题的关键是用好双曲线的定义．

例 4.（2003 年春季上海）已知椭圆具有的性质：若 M、N 是椭圆 C 上关于原点对称的两个点，点 P 是椭圆上任意一点，当直线 PM、PN 的斜率都存在，并记为 k_{PM}、k_{PN} 时，那么 k_{PM}

与 k_{PN} 之积是与点 P 位置无关的定值．试对双曲线 C'：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 写出具有类似特性的性质，并加以证明．

解：类似的性质为若 MN 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上关于原点对称的两个点，点 P 是双曲线上任意一点，当直线 PM、PN 的斜率都存在，并记为 k_{PM}、k_{PN} 时，那么 k_{PM} 与 k_{PN} 之积是与点 P 位置无关的定值．

设点 M 的坐标为（m，n），则点 N 的坐标为（－m，－n），其中 $\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}=1$.

又设点 P 的坐标为（x，y），

由 $k_{PM}=\frac{y-n}{x-m}$，$k_{PN}=\frac{y+n}{x+m}$，得 $k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{y-n}{x-m}\cdot\frac{y+n}{x+m}=\frac{y^2-n^2}{x^2-m^2}$，

将 $y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$，$n^2=\frac{b^2}{a^2}m^2-b^2$，代入得 $k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{b^2}{a^2}$.

评注：本题主要考查椭圆、双曲线的基本性质，考查类比、归纳、探索问题的能力.它