求函数值域方法

例题一

已知 $f(x)=\sqrt{3-x}+2\sqrt{x+1}$，求 $f(x)$ 的值域。

分析：观察到

$$\left(\sqrt{3-x}\right)^2+\left(\sqrt{x+1}\right)^2=4\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{x+1}}{2}\right)^2=1,$$

结合三角恒等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，对应比较，可以利用换元法。

解析

解：$f(x)$ 的定义域 $[-1,3]$，令 $\frac{\sqrt{3-x}}{2}=\cos\alpha$

即 $x=3-4\cos^2\alpha$，$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

所以

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{4\cos^2\alpha}+2\sqrt{4-4\cos^2\alpha}\\&=\sqrt{4\cos^2\alpha}+2\sqrt{4\sin^2\alpha}\\&=2\cos\alpha+4\sin\alpha\\&=2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\alpha\right)\\&=2\sqrt{5}\sin(\alpha+\theta),\end{aligned}$$

其中 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\tan\theta=2$，$\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，

因为 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\theta+\alpha\in\left[\theta,\frac{\pi}{2}+\theta\right]$，

所以 $\sin(\theta+\alpha)\in\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),\sin\frac{\pi}{2}\right]=\left[\frac{1}{\sqrt{5}},\ 1\right]$，

所以 $2\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)\in\left[2,2\sqrt{5}\right]$，即 $f(x)$ 的值域为 $\left[2,2\sqrt{5}\right]$.

点评

例题 1：一个重点+难点就是换元后 α 的范围，需根据题设而定。本题 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，既“够用”，又保证了 $\sqrt{\cos^2\alpha}=\cos\alpha$ 与 $\sqrt{\sin^2\alpha}=\sin\alpha$ 是个非负值，换元后的范围一定要标明。过程中还有一个重点就是应用辅助角公式进行三角函数名的统一。

例题二

设点 $P(x,\ y)$ 是椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上的一动点，求点 P 到直线 l：$x+y-4=0$ 的距离的最小值。

解析

解：设动点 P 的坐标为 $\left(\sqrt{3}\cos\alpha,\sin\alpha\right)$，

$\alpha\in[0,2\pi]$，因此点 P 到直线 $l:x+y-4=0$ 的距离

$$d=\frac{\left|\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{4-2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}}\geq\sqrt{2}$$

所以点 P 到直线 l 距离的最小值为 $\sqrt{2}$。

点评

例题 2：考虑椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos\alpha\\y=b\sin\alpha\end{cases},\quad\alpha\text{ 为参数。}$$

圆与椭圆的参数方程其本质也可理解为是三角换元。本题也可建立距离 d 关于 x 的函数关系，再求最小值。相比较，三角换元法更简单利索，也轻松自然。