4.4 利用生成函数解决组合计数问题

4.4.1 组合型分配问题

定理 1 设从 n 元集合中取 k 个元素的组合数为 ，若限定元素出现的次数集合为，则该组合数序列的生成函数为

定理 2 把 k 个相同的球放入 n 个不同的盒子 中，限定盒子的容量集合为，则其分配方案数的生成函数为

证明：不妨设盒子中放入的球数分别为则

一种符合要求的放法相当于的一个 k 组合，前面关于盒子容量的限制转变成 k 组合中出现的次数的限制。由定理 1 知，组合型分配问题方案数的生成函数为

例 1 投掷一次骰子，出现点数 1,2,...,6 的概率均为 。问连续投掷两次，出现的点数之和为 10 的概率有多少？连续投掷 10 次，出现的点数之和为 30 的概率又是多少？

解：一次投掷出现的点数有 6 种可能，连续两次投掷得到的点数构成二元数组，共有种可能。由枚举法，两次出现的点数之和为 10 的有 3 种可能：，所以概率为

如果问题是连续投掷 10 次，其点数之和为 30 的概率有多少，这时就不那么简单了。这是由于 10 个数之和为 30 的可能组合方式很多，难以一一列举，要解决这个问题，只能另辟新径。

我们用多项式

表示投掷一次可能出现点数观察

从两个括号中分别取出和，使。即是两次投掷分别出现点数 m,n，且

。由此得到，展开式中的系数就是满足条件的方法数。

同理，连续投掷 10 次，其和为 30 的方法数为 中的系数，而

所以，的系数为

故所求概率为

例 2 （1）求的 k 组合数；

（2）求的 k 组合数；

（3）求的 10 组合数

解：（1）设出现次数的集合为，则有

所以该组合序列的生成函数为

表示从 n 个括号中分别取出和，使。由此得到，展开式中的系数就是满足条件的方法数。所以，的系数为，的 k 组合数为

（2）令的 k 组合数为，考虑 n 个形式幂级数的乘积

它的展开式中，每一个均为，

其中，分别取自代表的第一个括号，代表的第二个括号，代表的第 n 括号；分别表示取的个数。因此序列的生成函数

中的系数就是，所以得到的 k 组合数为

（3）令的 k 组合数为由题意知出现的次数集合为，出现的次数集合为，出现的次数集合为。所以序列的生成函数为

所以，的系数为

所以得到的 10 组合数为 6

4.4.2 不定方程解的个数

例 1 不定方程的非负整数解有多少组？

解：设的取值集合为，由题意知

该组合分配问题的生成函数为

其中的系数为，所以不定方程的非负整数

解有个

例 2 不定方程的正整数解有多少组？

解：设的取值集合为，由题意知

该组合分配问题的生成函数为

其中的系数为，所以不定方程

的非负整数解有个

例 3 求不定方程满足

的整数解的个数？

解：设的取值集合为，由题意知

该组合分配问题的生成函数为

其中的系数为，所以不定方程满足的整数解的个数为 126 个

例 4 从数中按由小到大的顺序取出使得同时满足则所有符合要求的不同取法有多少种？

解：由令

则于是，问题转化为不定方程在下的整数解个数

设的取值集合为，由题意知

该组合分配问题的生成函数为

其中的系数为，所以所有符合要求的不同取法有 120 种。