

4.3.2 非等差、等比数列的前 n 项和求解

对于等差、等比数列的求和，相信对于学生来说并不难，包括一些等差和等比数列组合成的新数列，通过裂项相消等方法也可以解决。但是一些高中内容中常见的非等差、等比数列的求和问题对于老师而言也是一种挑战，可能只是知道其结果，而推理的过程也是借助数学归纳来证明。下面介绍几个用生成函数来推理的例子。

例 1 求数列的前 n 项和

解：由前面列出的第（5）个数列的生成函数知，数列的生成函数为

其中，令

则

由性质 1 即得数列的生成函数为

比较等式两边的系数，便得

例 2 求数列的前 n 项和

解：由前面列出的第（7）个数列的生成函数知，数列的生成函数为

其中，令

则

由性质 1 即得数列的生成函数为

比较等式两边的系数，便得

例 3 求数列的前 n 项和

解：由前面列出的第（4）个数列的生成函数知，数列的生成函数为

其中，令

则

由性质 1 即得数列的生成函数为

比较等式两边的系数，使得

相信对于上面 3 个非等差、等比数列的前 n 项求和公式大家也很熟悉，在高中阶段的参考书上，是直接给出了公式，让学生应用数学归纳法来证明公式的正确性。在以后的学习过程中，便理所当然的当成已知知识进行运用，而不考虑它的推导。有了生成函数的知识，我们可以给出这类数列求和公式一个直接推导的方法，类似的其它数列的求和公式读者可以尝试推导给出。对于数学教学来说，在与求知欲比较强的学生交流时，也能更加有底气，而不只是说一句——你只需要背下来会用就可以了，不需要了解推导过程。