

解析几何中的切线问题

解决这类问题的通常做法是用两个待定系数表示出切线的方程，

再通过与圆锥曲线的方程联立得到一个一元二次方程以及判别式等于零这一条件得到两个待定系数的关系。最后通过其他条件达到解题的目的。对于圆的切线问题，可以通过圆心到切线的距离等于半径这一条件来求解。对于有多条切线的问题，我们还可以用切线系方程来解题。本文将着重介绍运用切线系方程解决切线问题的方法。首先，我们以 2015 年湖北卷第 21 题为例。

【2015 高考湖北，理 21】一种画椭圆的工具如图 1 所示。是滑槽的中点，短杆 ON 可绕 O 转动，长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接， MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动，且，
当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时，带动 N 绕转动， M 处的笔尖画出的椭圆记为 C 。以为原点，所在的直线为轴建立如图 2 所示的平面直角坐标系。

(I) 求椭圆 C 的方程；

(II) 设动直线与两定直线和分别交于两点。若直线总与椭圆有且只有一个公共点，试探究：的面积是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，说明理由。

【答案】(I) (II) 当直线与椭圆在四个顶点处相切时，的面积取得最小值 8.

【解析】(I) 因为，当在 x 轴上时，等号成立；同理，当重合，即轴时，等号成立。所以椭圆 C 的中心为原点，长半轴长为，短半轴长为，其方程为

(II) (1) 当直线的斜率不存在时，直线为或，都有。

(2) 当直线的斜率存在时，设直线，由消去，可得。因为直线总与椭圆有且只有一个公共点，所以，即。①

又由可得；同理可得。由原点到直线的距离为和，可得

②

将①代入②得，当时，；当时，。因，则，，所以，当且仅当时取等号。所以当时，的最小值为 8.

综合 (1) (2) 可知，当直线与椭圆在四个顶点处相切时，的面积取得最小值 8.

下面我们用切线系方程来求解该题第（II）题

此题运用切线系方程计算量较小，且不用讨论切线斜率不存在的情况，大大节省了解题的时间。

像这样在椭圆的切线问题中运用切线系方程解题的例子还有：

下面我们用椭圆的切线系方程来求解该题第（2）题

此题运用切线方程，可以避免因为漏掉特殊点而失分，且计算量相对较小，计算过程也很简单，不涉及太复杂的技巧。

下面我们用椭圆的切线系方程来解这道题。

在用切线系方程解第（3）题之前，我向大家介绍一种快速解第（2）题的方法。这个方法设计三角形中角平分线的相关性质。

第(3)题仍然可用椭圆的切线系方程快速求解

此类问题还有很多，本文就不一一列举。一般来说，切线系方程在解决椭圆的切线问题时，具有计算量小的特点，有时还可以避免讨论特殊情况，一定程度上减少了失误的可能性。有关圆的切线问题使用切线系方程并没有明显优势，因为用圆心到

直线的距离等于半径这一条件更为简单，大家可以参考，，。
关于抛物线的切线问题也不建议大家用切线系方程求解，具体可以参考。关于双曲线的切线问题，出现频率较低，暂不作讨论。

- 附：①对于圆的切线系方程：，其中点是圆上任意一点。
②对于椭圆的切线系方程：，其中点是椭圆上任意一点。
③对于双曲线的切线系方程：，其中点是双曲线上任意一点。
（另一种形式的双曲线可以类比得到对应的切线系方程）
④对于抛物线的切线系方程：，其中点是抛物线上任意一点。
（另一种形式的抛物线可以类比得到对应的切线系方程）