

专题复习：递推数列通项公式的求法

各种数列问题在很多情形下，就是对数列通项公式的求解。特别是在一些综合性比较强的数列问题中，数列通项公式的求解问题往往是解决数列难题的瓶颈。

数列是近几年高考中的重点，难点，也是热点。所占分值约为12%—16%，并在解答题中必有一道且往往是以压轴题的形式出现，可见其重要性非同一般。从近几年高考数列题中不难发现，大部分试题都与通项公式有关，也进一步说明数列通项公式求法的重要性。当前我认为掌握了数列通项公式应是研究数列其它性质的重要前提，也会使我们解决数列相关问题变得更简单化。

高考大纲中也明确提出：要了解数列通项公式的意义，能根据数列递推公式求出通项公式并能解决简单的实际问题。

一．求递推数列的常用方法和技巧

1. 公式法
2. 作差求和法（累加法）
3. 作商求和法（累乘法）
4. 换元法
5. 取倒数法
6. 取对数法
7. 待定系数法
8. 猜想法

二：方法模型与具体例题分析

1. 公式法

等差数列： $a_n = a_1 + (n-1)d$ 或 $a_n = a_m + (n-m)d$

等比数列： $a_n = a_1 q^{n-1} (a_1 \cdot q \neq 0)$ 或 $a_n = a_m q^{n-m} (a_1 \cdot q \neq 0)$;

2. 作差求和法（累加法）

适用于： -----这是广义的等差数列

若，

则

两边分别相加得

例题：在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 3$ ， $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ ，求通项公式 a_n 。

解：原递推式可化为： $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 则 $a_2 = a_1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ ，

$$a_3 = a_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ 逐项相加得: } a_n = a_1 + 1 - \frac{1}{n}. \text{ 故}$$

$$a_n = 4 - \frac{1}{n}.$$

3. 作商求和法（累乘法）

适用于：-----这是广义的等比数列

若，则

两边分别相乘得，

例题：设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$

($n=1, 2, 3, \dots$)，则它的通项公式是 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$

解：原递推式可化为：

$$\begin{aligned} [(n+1)a_{n+1} - na_n](a_{n+1} + a_n) &= 0 \quad \because a_{n+1} + a_n > 0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \\ \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{3}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{4}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{n-1}{n} \quad \text{逐项相乘得: } \frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n}, \text{ 即 } a_n = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

4. 换元法

根据给出的式子构造出熟悉的数列结构

例题：已知数列 $\{a_n\}$ ，其中 $a_1 = \frac{4}{3}, a_2 = \frac{13}{9}$ ，且当 $n \geq 3$ 时， $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{3}(a_{n-1} - a_{n-2})$ ，

求通项公式 a_n

解：设 $b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$ ，原递推式可化为：

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= \frac{1}{3}b_{n-2}, \{b_n\} \text{ 是一个等比数列, } b_1 = a_2 - a_1 = \frac{13}{9} - \frac{4}{3} = \frac{1}{9}, \text{ 公比为 } \frac{1}{3}. \text{ 故} \\ b_{n-1} &= b_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \text{ 故 } a_n - a_{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n. \text{ 由逐差法可得: } a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

练习：若数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2$ 且 $a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}^2}$ ($n \geq 2$)，求它的通项公式是 a_n 。

5. 取倒数法

适用于分式关系的递推公式，分子只有一项

例题：已知数列满足，求数列的通项公式。

解：求倒数得为等差数列，首项，公差为，

6. 取对数法

适用于(其中 p, r 为常数)型 $p > 0$,

例题：设正项数列满足， $(n \geq 2)$.求数列的通项公式.

解：两边取对数得：，，设，则 是以 2 为公比的等比数列，，，， $\therefore$

7. 待定系数法

① $a_{n+1} = Aa_n + B$ (A、B 为常数) 型，可化为 $a_{n+1} + \lambda = A(a_n + \lambda)$ 的形式.

例题：已知数列中，，求数列的通项公式。

又是首项为 2，公比为 2 的等比数列

，即

② 形如： (其中 q 是常数，且 $n \geq 0, 1$)

基本思路是转化为等差数列或等比数列，而数列的本质是一个函数，其定义域是自然数集的一个函数。

例题：在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -1, a_{n+1} = 2a_n + 4 \cdot 3^{n-1}$ ，求通项公式 a_n 。

解：原递推式可化为：

$$a_{n+1} + \lambda \cdot 3^n = 2(a_n + \lambda \cdot 3^{n-1}) \quad ①$$

比较系数得 $\lambda = -4$ ，①式即是： $a_{n+1} - 4 \cdot 3^n = 2(a_n - 4 \cdot 3^{n-1})$ 。

则数列 $\{a_n - 4 \cdot 3^{n-1}\}$ 是一个等比数列，其首项 $a_1 - 4 \cdot 3^{1-1} = -5$ ，公比是 2。

$$\therefore a_n - 4 \cdot 3^{n-1} = -5 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{即 } a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 5 \cdot 2^{n-1}$$

解法二（两边同除以）： 两边同时除以得：，下面解法略

解法三（两边同除以）： 两边同时除以得：，下面解法略

③ 形如 (其中 k,b 是常数，且)

通过凑配可转化为 ；

解题基本步骤：

1、确定 $=kn+b$

2、设等比数列，公比为 p

3、列出关系式,即

4、比较系数求 x,y

5、解得数列的通项公式

6、解得数列的通项公式

例题：在数列中，,求通项.

解：原递推式可化为

比较系数可得： $x=-6, y=9$, 上式即为

所以是一个等比数列，首项,公比为. 即：

故.

8. 猜想法

运用猜想法解题的一般步骤是：首先利用所给的递推式求出 $a_1, a_2, a_3, \dots$ ，然后猜想出满足递推式的一个通项公式 a_n ，最后用数学归纳法证明猜想是正确的。

例题： 已知数列满足，求数列的通项公式。

解：由及，得

由此可猜测，下面用数学归纳法证明这个结论。

(1) 当时，，所以等式成立。

(2) 假设当时等式成立，即，则当时，

由此可知，当时等式也成立。

根据 (1)，(2) 可知，等式对任何都成立。