第5讲　数形结合思想在解题中的应用

一、知识整合

1．数形结合是数学解题中常用的思想方法，使用数形结合的方法，很多问题能迎刃而解，且解法简捷。所谓数形结合，就是根据数与形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法。数形结合思想通过“以形助数，以数解形”，使复杂问题简单化，抽象问题具体化能够变抽象思维为形象思维，有助于把握数学问题的本质，它是数学的规律性与灵活性的有机结合。

2．实现数形结合，常与以下内容有关：①实数与数轴上的点的对应关系；②函数与图象的对应关系；③曲线与方程的对应关系；④以几何元素和几何条件为背景，建立起来的概念，如复数、三角函数等；⑤所给的等式或代数式的结构含有明显的几何意义。

3．纵观多年来的高考试题，巧妙运用数形结合的思想方法解决一些抽象的数学问题，可起到事半功倍的效果，数形结合的重点是研究“以形助数”。

4．数形结合的思想方法应用广泛，常见的如在解方程和解不等式问题中，在求函数的值域，最值问题中，在求复数和三角函数问题中，运用数形结合思想，不仅直观易发现解题途径，而且能避免复杂的计算与推理，大大简化了解题过程。这在解选择题、填空题中更显其优越，要注意培养这种思想意识，要争取胸中有图，见数想图，以开拓自己的思维视野。

二、例题分析

例1.

分析：

，

例2.

解：法一、常规解法：

法二、数形结合解法：

例3.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 1个或2个或3个

分析：

出两个函数图象，易知两图象只有两个交点，故方程有2个实根，选（B）。

例4.

分析：

例 5.

分析：

构造直线的截距的方法来求之。

截距。

例 6.

分析：

以 3 为半径的圆在 x 轴上方的部分，（如图），而 N 则表示一条直线，其斜率 k=1，纵截

例 7.

MF_1 的中点，O 表示原点，则|ON|=（　　）

分析：①设椭圆另一焦点为 F_2，（如图），

又注意到 N、O 各为 MF_1、F_1F_2 的中点，

∴ON 是△MF_1F_2 的中位线，

②若联想到第二定义，可以确定点 M 的坐标，进而求 MF_1 中点的坐标，最后利用两点间的距离公式求出|ON|，但这样就增加了计算量，方法较之①显得有些复杂。

例 8.

分析：

例 9.

解法一（代数法）：，

解法二（几何法）：

例 10.

分析：

转化出一元二次函数求最值；倘若对式子平方处理，将会把问题复杂化，因此该题用常规解法显得比较困难，考虑到式中有两个根号，故可采用两步换元。

解：

第一象限的部分（包括端点）有公共点，（如图）

相切于第一象限时，u 取最大值

三、总结提炼

数形结合思想是解答数学试题的的一种常用方法与技巧，特别是在解决选择、填空题是发挥着奇特功效，复习中要以熟练技能、方法为目标，加强这方面的训练，以提高解题能力和速度。

四、强化训练

见优化设计。

【模拟试题】

一、选择题：

1. 方程的实根的个数为（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 函数的图象恰有两个公共点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.　　B.

C.　　D.

3. 设命题甲：，命题乙：，则甲是乙成立的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 不充分也不必要条件

4. 适合且的复数 z 的个数为（　　）

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 4 个

5. 若不等式的解集为则 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 已知复数的最大值为（　　）

A.　　B.　　C.　　D.

7. 若时，不等式恒成立，则 a 的取值范围为（　　）

A. （0，1）　　B. （1，2）　　C. （1，2]　　D. [1，2]

8. 定义在 R 上的函数上为增函数，且函数的图象的对称轴为，则（　　）

A.　　B.

C.　　D.

二、填空题：

9. 若复数 z 满足，则的最大值为___________。

10. 若对任意实数 t，都有，则、由小到大依次为___________。

11. 若关于 x 的方程有四个不相等的实根，则实数 m 的取值范围为___________。

12. 函数的最小值为___________。

13. 若直线与曲线有两个不同的交点，则实数 m 的取值范围是___________。

三、解答题：

14. 若方程上有唯一解，

求 m 的取值范围。

15. 若不等式的解集为 A，且，求 a 的取值范围。

16. 设，试求下述方程有解时 k 的取值范围。

【试题答案】

一、选择题

1. C

提示：画出在同一坐标系中的图象，即可。

2. D

提示：画出的图象

情形 1：

情形 2：

3. A

4. C

提示：|Z

1|=1 表示以（1，0）为圆心，以 1 为半径的圆，显然点 Z 对应的复数满足条件，另外，点 O 对应的复数 O，因其辐角是多值，它也满足，故满足条件的 z 有两个。

5. B

提示：画出的图象，依题意，从而。

6. C

提示：由可知，z_2 对应的点在以（0，0）为圆心，以 2 为半径的圆上，

而

表示复数对应的点的距离，

结合图形，易知，此距离的最大值为：

7. C

提示：令，

若 a>1，两函数图象如下图所示，显然当时，

要使，只需使，综上可知

当时，不等式对恒成立。

若，两函数图象如下图所示，显然当时，不等式恒不成立。

可见应选 C

8. A

提示：f(x+2)的图象是由 f(x)的图象向左平移 2 个单位而得到的，又知 f(x+2)的图象关于直线 x=0（即 y 轴）对称，故可推知，f(x)的图象关于直线 x=2 对称，由 f(x)在（）上为增函数，可知，f(x)在上为减函数，依此易比较函数值的大小。

二、填空题：

9.

提示：|Z|=2 表示以原点为原心，以 2 为半径的圆，即满足|Z|=2 的复数 Z 对应的点在圆 O 上运动，（如下图），而|
z+1
i|=|z－（－1+i）|表示复数 Z 与－1+i 对应的两点的距离。

由图形，易知，该距离的最大值为。

10.

提示：由知，f(x)的图象关于直线 x=2 对称，又为二次函数，其图象是开口向上的抛物线，由 f(x)的图象，易知的大小。

11.

提示：设，画出两函数图象示意图，要使方程有四个不相等实根，只需使

12. 最小值为

提示：对，联想到两点的距离公式，它表示点（x，1）到（1，0）的距离，表示点（x，1）到点（3，3）的距离，于是表示动点（x，1）到两个定点（1，0）、（3，3）的距离之和，结合图形，易得。

13.

提示：y=x
m 表示倾角为 45°，纵截距为－m 的直线方程，而则表示以（0，0）为圆心，以 1 为半径的圆在 x 轴上方的部分（包括圆与 x 轴的交点），如下图所示，显然，欲使直线与半圆有两个不同交点，只需直线的纵截距，即。

三、解答题：

14. 解：原方程等价于

令，在同一坐标系内，画出它们的图象，

其中注意，当且仅当两函数的图象在[0，3）上有唯一公共点时，原方程有唯一解，由下图可见，当 m=1，或时，原方程有唯一解，因此 m 的取值范围为[
3，0]{1}。

注：一般地，研究方程时，需先将其作等价变形，使之简化，再利用函数图象的直观性研究方程的解的情况。

15. 解：令表示以（2，0）为圆心，以 2 为半径的圆在 x 轴的上方的部分（包括圆与 x 轴的交点），如下图所示，表示过原点的直线系，不等式的解即是两函数图象中半圆在直线上方的部分所对应的 x 值。

由于不等式解集

因此，只需要

∴a 的取值范围为（2，+）。

16. 解：将原方程化为：，

∴

令，它表示倾角为 45°的直线系，

令，它表示焦点在 x 轴上，顶点为（－a，0）（a，0）的等轴双曲线在 x 轴上方的部分，

∵原方程有解，

∴两个函数的图象有交点，由下图，知

∴

∴k 的取值范围为