函数复习主要知识点

一、函数的概念与表示

1、映射:设A、B是两个集合，如果按照某种映射法则f，对于集合A中的任一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，则这样的对应（包括集合A、B以及A到B的对应法则f）叫做集合A到集合B的映射，记作f：A→B。**注意点:判断一个对应是映射的方法:可多对一，不可一对多，都有象，象唯一.**

$$x \in A, y = f(x) \in B$$

2、函数:如果A,B都是非空的数集，那么A到B的映射f：AB就叫做A到B的函数，记作,其中.原像的集合A叫做函数的定义域.由所有象f(x)构成的集合叫做的值域，显然值域是集合B的子集.

构成函数概念的三要素: ①定义域(x的取值范围)②对应法则（f）③值域（y的取值范围）

两个函数是同一个函数的条件：定义域和对应关系完全一致.

二、函数的定义域、解析式与值域

1、求函数定义域的主要依据：

（1）整式的定义域是全体实数；

（2）分式的分母不为零；

（3）偶次方根的被开方数大于等于零；

（4）零取零次方没有意义（零指数幂的底数不为0）；

（5）对数函数的真数必须大于零；

（6）指数函数和对数函数的底数必须大于零且不等于1；

$$y = f(x)$$

（7）若函数是一个多项式，需要求出各单项式的定义域，然后取各部分结果的交集；

（8）复合函数的定义域：

$$g(x) \quad f(x) \quad [a,b]$$

若已知的定义域，求复合函数的定义域，相当于求使时的取值范围；

$$f(g(x)) \quad g(x)$$

若已知复合函数的定义域，求的定义域，相当于求的值域.

2求函数值域的方法

①直接法：从自变量x的范围出发，推出y=f(x)的取值范围，适合于简单的复合函数；

$$y = ax + b \pm \sqrt{cx + d}$$

②换元法：利用换元法将函数转化为二次函数求值域，适合的形式；

$$x$$

③判别式法：运用方程思想，依据二次方程有根，求出y的取值范围；适合分子或分母为二次且∈R的分式；

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}, \quad y = \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}, \quad y = \frac{a'x^2+b'x+c'}{ax^2+bx+c}$$

此种类型不拘泥于判别式法，如的形式可直接用不等式性质；可先化简再用均值不等式；通常用判别式法；可用判别式法或均值不等式；

④分离常数：适合分子分母皆为一次式（x有范围限制时要画图）；

⑤单调性法：利用函数的单调性求值域；

⑥图象法：1.二次函数必画草图求其值域；在给定区间上求最值有两类：

闭区间上的最值； $[a,b]$

函数复习主要知识点

求区间动（定），对称轴定（动）的最值问题；
注意“两看”：一看开口，二看对称轴与给定区间的位置关系.

$$y = ax + \frac{b}{x}\ (a > 0, b > 0)$$

2.注意型函数的图像在单调性中的应用：增区间为，，减区间为，；

$$y = x + \frac{1}{x}$$

⑦利用对号函数：（如右图）；

⑧几何意义法：由数形结合，转化距离等求值域.<u>主要是含绝对值函数</u>

三．函数的奇偶性

$$f(-x) = f(x)$$

1．定义:　设 y=f(x)，x∈A，如果对于任意∈A，都有，则称 y=f(x)为偶函数.

$$f(-x) = -f(x)$$

如果对于任意∈A，都有，则称 y=f(x)为奇函数.

2.性质：

①y=f(x)是偶函数 y=f(x)的图象关于轴对称，　　y=f(x)是奇函数 y=f(x)的图象关于原点对称;

②若函数 f(x)的定义域关于原点对称，则 f(0)=0;

③奇±奇=奇　偶±偶=偶　奇×奇=偶　偶×偶=偶　奇×偶=奇[两函数的定义域 D_1 ，D_2，$D_1 \cap D_2$要关于原点对称]

3．奇偶性的判断

①看定义域是否关于原点对称;②看 f(x)与 f(-x)的关系或观察函数图像的对称关系;

4，复合函数的奇偶性：**“内偶则偶，内奇同外”**

四、函数的单调性

作用：比较大小，解不等式，求最值.

$$f(x_1) < f(x_2)\ \left(f(x_1) > f(x_2)\right)$$

1、函数单调性的定义：如果对于定义域 I 内的某个区间 D 上的任意两个自变量的值，当时，都有，那么就称函数在区间 D 上是增函数（减函数），区间 D 叫的单调区间.　图像特点：增函数：从左到右上升（y 随 x 的增大而增大或减小而减小）；

减函数：从左到右下降（y 随 x 的增大而减小或减小而增大）；

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x)\text{在}[a,b]$$

2.判断单调性方法：①定义法上是增函数；

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x)\text{在}[a,b]$$

上是减函数.

②观察法：根据特殊函数图像特点；

函数复习主要知识点

I ŋ$g(x)$

③掌握规律：对于两个单调函数和，若它们的定义域分别为和，且：

$$g(x)$$

(i)当和具有相同的增减性时，

$$F_1(x) = f(x) + g(x)$$

①的增减性与，相同，

$$F_2(x) = f(x) \cdot g(x) \quad F_3(x) = f(x) - g(x) \quad F_4(x) = \frac{f(x)}{g(x)}(g(x) \neq 0)$$

②、、的增减性**不能确定**；

$$g(x)$$

(ii)当和具有相异的增减性时，我们假设为增函数，为减函数，那么：

$$F_1(x) = f(x) + g(x)$$

①的增减性不能确定；

$$F_3(x) = f(x) - g(x) \quad F_5(x) = \frac{f(x)}{g(x)}(g(x) \neq 0)$$

②、为增函数；为减函数.

3. 奇偶函数的单调性

奇函数在其定义域内的对称区间上的单调性相同，偶函数在其定义域内的对称区间上的单调性相反。

$$y = f\left[g(x)\right]$$

4. 复合函数单调性的确定（**同增异减**）：是定义在M上的函数，若f(x)与g(x)的单调性相反，则在M上是减函数；若f(x)与g(x)的单调性相同，则在M上是增函数.

5、函数的对称性函数

$$y = f(x)$$

的图象的对称性（自身）

$$f(a+x) = f(b-x) \quad x = \frac{a+b}{2}$$

1.函数的图象关于直对称

$$\Leftrightarrow f(a+x) = f(a-x) \Leftrightarrow f(2a-x) = f(x)$$

特殊的有：①函数的图象关于直线对称.

$$\Leftrightarrow f(-x) = f(x) \quad y = x$$

②函数的图象关于轴对称（奇函数）；

$$y = f(x+a) \Leftrightarrow f(x) = \ldots$$

③函数是偶函数关于对称；

函数复习主要知识点

$$f(a+x)=f(b-x)\quad y=f(x)\quad x=\frac{a+b}{2}$$

2. 函数的图象关于点对称.

特殊的有：

$$\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=0\quad y=f(x)\quad (a,0)$$

1　函数的图象关于点对称；

$$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\quad y=f(x)$$

2　函数的图象关于原点对称（奇函数）；

$$y=f(x+a)\quad (a,0)$$

3　函数是奇函数关于点 对称.

4　若一个函数的反函数是它本身,那么它的图像关于直线 y=x 对称.

两个函数图象的对称性:

$$y=f(x)\quad y=f(-x)\quad x=0$$

① 函数与函数的图象关于直线(即轴)对称;

$$y=f(mx-a)\quad y=f(b-mx)\quad x=\frac{a+b}{2m}$$

② 函数与函数的图象关于直线对称

$$y=f(x)\quad x=a\quad y=f(2a-x)$$

特殊地：与函数的图象关于直线对称;

$$y=f(x)\quad y=a\quad y=2a-f(x)$$

③ 函数的图象关于直线对称的解析式为;

$$y=f(x)\quad (a,0)\quad y=-f(2a-x)$$

④ 函数的图象关于点对称的解析式为;

$$y=f(x)\quad x=f(y)\quad x+y=a\quad a-x=f(a-y)$$

⑤ 函数与的图像关于直线成轴对称

$$y=f(x)\quad x=f(y)\quad x-y=a\quad x-a=f(y+a)$$

函数与的图像关于直线成轴对称

$$y=f(x)\quad x=y$$

函数的图像与 x = f (y)的图像关于直线 成轴对称.

六．函数的周期性：

1．**定义** 若是周期函数，T 是它的一个周期. $f(x)\quad f(x+T)=f(x)\ (T\neq 0)\Leftrightarrow$

函数复习主要知识点

$$f(x+a)=f(x+b)$$

说明：nT 也是的周期。**推广：**若，则是周期函数，是它的一个周期

$$f(x+a)=f(x+b) \quad T=|a-b|$$

结论 1：如果（），那么是周期函数，其中一个周期

$$f(x+a)=-f(x+b) \quad T=2|a-b|$$

结论 2：如果（），那么是周期函数，其中一个周期

$$T=2|a-b|$$

结论 3：如果定义在上的函数有两条对称轴、对称，那么是周期函数，其中一个周期

$$T=2|a|$$

结论 4：如果偶函数的图像关于直线（）对称，那么是周期函数，其中一个周期

$$T=4|a|$$

结论 5：如果奇函数的图像关于直线（）对称，那么是周期函数，其中一个周期

$$T=2|a-b|$$

结论 6：如果函数同时关于两点、（）成中心对称，那么是周期函数，其中一个周期

$$T=2|a|$$

结论 7：如果奇函数关于点（）成中心对称，那么是周期函数，其中一个周期

$$T=4|a-b|$$

结论 8：如果函数的图像关于点（）成中心对称，且关于直线（）成轴对称，那么是周期函数，其中一个周期

$$f(x+p)=\frac{1}{f(x)} \quad f(x+p)=-\frac{1}{f(x)} \quad T=2p$$

结论 9：如果或，那么是周期函数，其中一个周期

$$f(x+\frac{p}{2})=\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \quad T=2p$$

结论 10：如果或，那么是周期函数，其中一个周期

$$f(x+p)=-f(x) \quad T=2p$$

结论 11：如果，那么是周期函数，其中一个周期

七、反函数

1.只有单调的函数才有反函数；反函数的定义域和值域分别为原函数的值域和定义域；

2、求反函数的步骤 （1）解 (2)换 (3)写定义域。

3、关于反函数的性质

（1）y=f(x)和 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 y=x 对称；

（2）y=f(x)和 $y=f^{-1}(x)$具有相同的单调性；

（3）已知 y=f(x)，求 $f^{-1}(a)$，可利用 f(x)=a，从中求出 x，即是 $f^{-1}(a)$；

（4）$f^{-1}[f(x)]=x$；

（5）若点 (a,b)在 y=f(x)的图象上，则 (b,a)在 $y=f^{-1}(x)$的图象上；

（6）y=f(x)的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象的交点一定在直线 y=x 上；

八．二次函数(涉及二次函数问题必画图分析)

函数复习主要知识点

$$y=ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

一般式： ；

顶点式：；

零点式：

1．二次函数 f(x)=ax^2+bx+c(a≠0)的图象是一条抛物线，对称轴 ，顶点坐标

，开口向上， ，开口向下

2．二次函数与一元二次方程关系

一元二次方程 的根为二次函数 f(x)=ax^2+bx+c(a≠0) 的 的取值.

韦达定理：

3.一元二次不等式 的解集(a>0)

	二次函数	△情况	一元二次不等式解集	
	Y=ax^2+bx+c (a>0)	△=b^2-4ac	ax^2+bx+c>0 (a>0)	ax^2+bx+c<0 (a>0)
图象与解		△>0		
		△=0		
		△<0	R	

九、指数式与对数式

1．幂的有关概念

(1)零指数幂 ； (2)负整数指数幂

(3)正分数指数幂 ；

(4)负分数指数幂

函数复习主要知识点

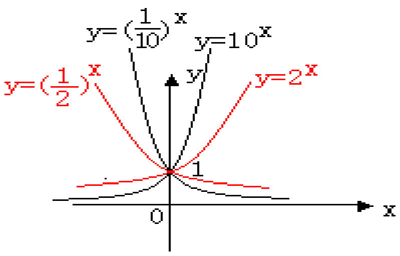
(5) 0的正分数指数幂等于0,0的负分数指数幂没有意义.

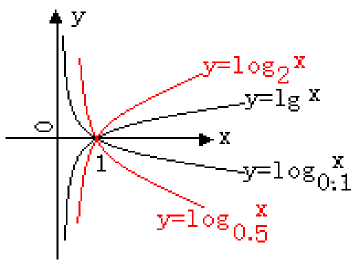
2．有理数指数幂的性质

3．根式 根式的性质:当 是奇数，则 ；当 是偶数，则

4．对数

(1) 对数的概念:如果 ，那么b叫做以a为底N的对数,记





(2)对数的性质：①零与负数没有对数　②　③

(3)对数的运算性质

①　②

对数换底公式:

对数的降幂公式:

（4）三个常用结论：① ；② ；③ .

十、指数函数与对数函数

1、　指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ （a>0 ，a≠1)互为反函数

名称	指数函数	对数函数
一般形式	$y=a^x$ （a>0且a≠1）	$y=\log_a x$ （a>0 ，a≠1）
定义域	(−∞,＋∞)	(0,＋∞)
值域	(0,＋∞)	(−∞,＋∞)
过定点	（0，1）	（1，0）
图象	指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ （a>0，a≠1)图象关于y=x对称	
单调性	a>1,在(−∞,＋∞)上为增函数 0＜a<1，在(−∞,＋∞)上为减函数	a>1,在(0,＋∞)上为增函数 0＜a<1，在(0,＋∞)上为减函数
值分布	y>1 ？　y<1?	y>0?　y<0?

指数函数图像分布规律：时，越大函数图像在y轴右侧越靠近y轴；
时，越小函数图像在y轴左侧越靠近y轴；

对数函数图像分布规律：时，越大函数图像在x轴上方越靠近x轴；
时，越小函数图像在x轴下方越靠近x轴；

函数复习主要知识点

2. 比较两个幂值的大小，是一类易错题，解决这类问题，首先要分清底数相同还是指数相同

2、　　，如果底数相同，可利用指数函数的单调性；指数相同，可以利用指数函数的底数与图象关系（对数式比较大小同理）

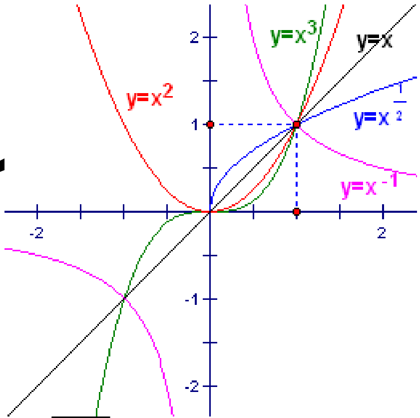
3. 研究指数，对数函数问题，尽量化为同底，并注意对数问题中的定义域限制

4. 指数函数与对数函数中的绝大部分？问题是指数函数与对数函数与其他函数的复合问题，讨论复合函数的单调性是解决问题的重要途径

$$y = x^n (n \in R)$$

幂函数：一般地，形如的函数称为幂函数，其中n为常数.

图像及性质：



$$1 = 1$$

（1）所有的幂函数在（0，+∞）都有定义，并且图象都过点（1，1）（原因：）；所有的幂函数在第四象限没有图像.

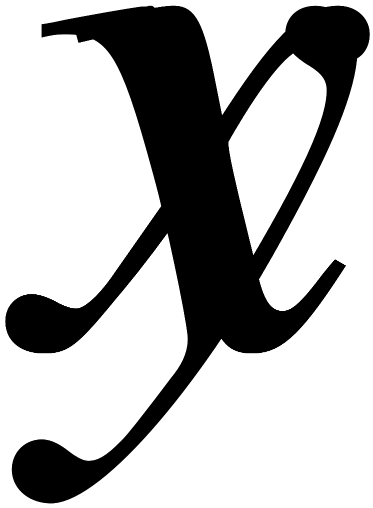
$$0 < n < 1$$

（2）n＞0时，幂函数的图象都通过原点，并且在[0，+∞]上，是增函数（从左往右看，函数图象逐渐上升）.

特别地，当时，图像下凸，当时，图像上凸；

（3）n＜0时，幂函数的图象在区间（0，+∞）上是减函数.

函数复习主要知识点



在第一象限内，当向原点靠近时，图象在轴的右方无限逼近轴正半轴，当慢慢地变大时，图象在轴上方并无限逼近轴的正半轴.

十一．函数的图象变换 1、平移变换：（左+　右-　，上+　下-　）即

$$y=f(x)\xrightarrow{h<0,\text{右移};h>0,\text{左移}} y=f(x+h)$$

$$y=f(x)\xrightarrow{k<0,\text{下移};k>0,\text{上移}} y=f(x)+k$$

2、对称变换：（对称谁，谁不变，对称原点都要变）

$$y=f(x)\xrightarrow{x\text{轴}} y=-f(x)$$

$$y=f(x)\xrightarrow{y\text{轴}} y=f(-x)$$

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{原点}} y=-f(-x)$$

$$y=f(x)\xrightarrow{y=x} y=f^{-1}(x)$$

$$y=f(x)\xrightarrow{y\text{轴右边不变，左边为右边部分的对称图}} y=f(|x|)$$

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{保留}x\text{轴上方图，将}x\text{轴下方图上翻}} y=|f(x)|$$

十二．函数的其他性质

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \gtrless 0$$

1．函数的单调性通常也可以以下列形式表达：　单调递增；　单调递减

2．函数的奇偶性也可以通过下面方法证明：　奇函数；偶函数 $f(x)\pm f(-x)=0$

3．函数的凸凹性：

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

凹函数（图象“下凹”，如：指数函数）

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

凸函数（图象“上凸”，如：对数函数）

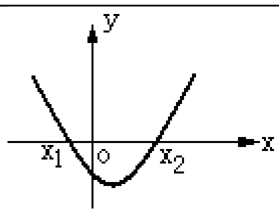
十三．函数的应用：二次函数与二次方程的关系：

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)\quad x_1<x_2$$

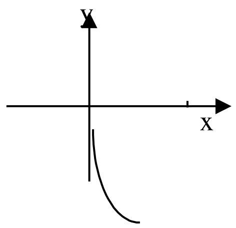
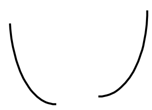
设一元二次方程的两个不等根为，且，相应的二次函数

$$y=ax^2+bx+c(a>0)$$

. 方程的根即为二次函数图像与 x 轴的交点，他们的分步情况如下：

分布情况	函数图像	二次函数法	二次方程法
两个负根 $x_1<x_2<0$		$\begin{cases}\Delta>0\\ -\frac{b}{2a}<0\\ f(0)>0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\ -\frac{b}{a}<0\\ \frac{c}{a}>0\end{cases}$
两个正根 $0<x_1<x_2$		$\begin{cases}\Delta>0\\ -\frac{b}{2a}>0\\ f(0)>0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\ -\frac{b}{a}>0\\ \frac{c}{a}>0\end{cases}$
一正根，一负根 $x_1<0<x_2$		$\begin{cases}\Delta>0\\ f(0)<0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta>0\\ \frac{c}{a}<0\end{cases}$
两根都小于 k $x_1<x_2<k$		$\begin{cases}\Delta>0\\ -\frac{b}{2a}<k\\ f(k)>0\end{cases}$	

函数复习主要知识点

两根都大于k $k<x_1<x_2$	、	$\begin{cases}\Delta>0\\ -\dfrac{b}{2a}<k\\ f(k)>0\end{cases}$	
一个大于k，一个小于k $x_1<k<x_2$		$\begin{cases}\Delta>0\\ f(k)<0\end{cases}$	
两根都在（m,n）内 $m<x_1<x_2<n$	x	$\begin{cases}\Delta>0\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n\\ f(m)>0, f(n)>0\end{cases}$	
两根只有一个在（m,n）内 $x_1<m<x_2<n$		$f(m)f(n)<0$	
一根在（m,n）内，令一根在（p,q）内	y	$f(m)>0, f(n)<0$ $f(p)<0, f(q)>0$	

$y=f(x)$ $f(x)=0$

函数零点问题： 对于函数，把使的实数叫做函数的零点.

$$f(a)f(b)<0$$

零点存在性定理：如果函数在区间上是连续不断的一条曲线，并且有，那么函数在区间（a,b）内有零点，即存在使，这个c也就是方程的根.

（1）利用函数图像解决函数零点问题（转化为函数交点问题）；

（2）利用零点性质求参数取值范围.

函数复习主要知识点

导数及其应用：

一.利用导数的几何意义求曲线在某点处的切线方程是高考的热点问题，解决该类问题必须熟记导数公式，明确导数的几何意义是曲线在某点处切线的斜率，切点既在切线上又在曲线上.

注意：1."过某点的切线"中的某点可以不在曲线上，而"在某点的切线"中的某点一定在这条曲线上；过某点的切线条数可能是不止一条，但在某点的切线条数必定唯一.

$$y=x^3$$

2.曲线的切线与这条曲线的公共点可能不唯一，只是在切点的邻近区域才是唯一的，当曲线是二次曲线时，公共点只有一个；当曲线为其他曲线时，公共点可能有多个,如曲线在点（1,1）处的切线与该曲线有两个公共点（1,1），（-2，-8）

2. 利用导数求函数单调区间、极值、最值

$$y=x^3(x=0$$

利用导数研究函数的单调性和极、最值问题已成为高考考查的热点．解决该类问题要明确：极值点一定是导数为零的点，但导数为零的点不一定是极值点，导函数的变号零点才是函数的极值点（例如是导数为零的点但不是极值点；求单调区间时要注意函数定义域；求最值时需要把极值和端点值逐一求出，比较即可.

核心考点：

1.含参函数的单调性（区间）与极值、最值

思路提示：第一步，求函数定义域；第二步，求导函数；第三步，以导函数的零点存在性进行讨论；第四步，当导函数存在多个零点时，讨论他们的大小关系及与区间的位置关系；第五步，判断导函数符号，从而得出函数的单调性；第六步，综合上述讨论下结论.

2.含参函数在区间上具有单调性、无单调性或存在单调区间，求参数范围

$$f'(x)\geq 0$$

思路提示：①已知函数在区间上单调递增或单调递减，转化为或恒成立；先分析导函数图像形式和特点，如一次函数最值落在端点，开口向上抛物线最大值落在端点，考口向下抛物线最小值落在端点等；

② 已知区间上函数不单调，转化为在区间上存在极值（即导函数在区间上存在变号零点），可利用分离变量法求解参变量范围；或者利用补集思想；

③ 已知函数在区间上存在单调增或减区间，转化为导函数在区间上大于或小于零有解.

3.方程解（函数零点）的个数问题

$$f(x)=0$$

思路提示：研究函数的零点问题常常与研究对应方程的实根问题相互转化

$$a=g(x)$$

已知含参函数**存在零点求参**数范围问题一般对进行参变分离，得到的形式，则所求 a 的范围就是的值域；

$$f(x)$$

当研究函数**零点个数**问题时，要借助数形结合.

4.不等式恒成立与存在性问题

思路提示：1.在不等式恒成立或不等式有解条件下求参数的取值范围，一般转化为函数的最值或值域问题，可

函数复习主要知识点

采用“分离常数”或“直接移项构造辅助函数”。

$$f(x)_{max}$$

（1）若函数在区间 D 上存在最小值和最大值，则：

$$f(x)_{min} > a$$

① 不等式在区间 D 上恒成立；

$$f(x)_{min} \ge a$$

② 不等式在区间 D 上恒成立；

$$f(x)_{max} < b$$

③ 不等式在区间 D 上恒成立；

$$f(x)_{max} \le b$$

④ 不等式在区间 D 上恒成立；

$$f(x)$$

（2）若函数在区间 D 上不存在最大（小）值，且值域为（m,n），则：

$$f(x) \ge a$$

① 不等式（或）在区间 D 上恒成立

$$f(x) \le b$$

② 不等式（或）在区间 D 上恒成立

思路提示 2：

$$f(x)_{max}$$

（1）若函数在区间 D 上存在最小值和最大值，则对不等式有解问题有以下结论：

$$a < f(x)_{max}$$

① 不等式在区间 D 上有解；

$$a \le f(x)_{max}$$

② 不等式在区间 D 上有解；

$$a > f(x)_{min}$$

③ 不等式在区间 D 上有解；

$$a \ge f(x)_{min}$$

④ 不等式在区间 D 上有解；

$$f(x)$$

（2）若函数在区间 D 上不存在最大（小）值，且值域为（m,n），则对不等式有解问题有以下结论：

$$a \le f(x)$$

① 不等式（或）在区间 D 上有解

$$b \ge f(x)$$

② 不等式（或）在区间 D 上恒成立

思路提示 3：

对于任意的，总存在，使 $f(x_1) \ge g(x_2)$ $x_1 \in [a,b]$ $x_2 \in [m,n]$ $f(x_1)_{min} \ge g(x_2)_{min}$

$$f(x_1)\le g(x_2)\quad x_2\in[a,b]\quad [f(x_1)]_{\max}\le g(x_2)_{\max}$$

对于任意的，总存在，使

$$f(x_1)\ge g(x_2)\quad x_2\in[a,b]\quad [f(x_1)]_{\min}\ge g(x_2)_{\max}$$

对于任意的，，使

$$f(x_1)\le g(x_2)\quad x_2\in[a,b]\quad [f(x_1)]_{\min}\le g(x_2)_{\min}$$

对于存在，任意的，使

5. 利用导数证明不等式

思路提示：

构造辅助函数，把不等式证明转化为利用导数研究函数的单调性或求最值，从而证得不等式

构造辅助函数的一般方法及解题程序如下：

（1）移项，使不等式的一端为 0，另一端即为所作的辅助函数；

（2）求导函数，并验证函数在指定区间上的单调性；

（3）求出区间端点的函数值（或最值），作比较即可.