# 求数列通项公式的十一种方法（方法全，例子全，归纳细）

总述：一．利用递推关系式求数列通项的11种方法：

累加法、

累乘法、

待定系数法、

阶差法（逐差法）、

迭代法、

对数变换法、

倒数变换法、

换元法（目的是去递推关系式中出现的根号）、

数学归纳法、

不动点法（递推式是一个数列通项的分式表达式）、

特征根法

二。四种基本数列：等差数列、等比数列、等和数列、等积数列及其广义形式。等差数列、等比数列的求通项公式的方法是：累加和累乘，这二种方法是求数列通项公式的最基本方法。

三．求数列通项的方法的基本思路是：把所求数列通过变形，代换转化为等差数列或等比数列。

**四．求数列通项的基本方法是：累加法和累乘法。**

**五．数列的本质是一个函数，其定义域是自然数集的一个函数。**

## 一、累加法

**1．适用于：** $a_{n+1}=a_n+f(n)$ ----------这是广义的等差数列　累加法是最基本的二个方法之一。

2．若 $a_{n+1}-a_n=f(n)\ (n\geq 2)$，

则
$$\begin{aligned} a_2-a_1&=f(1)\\ a_3-a_2&=f(2)\\ \cdots\quad&\quad\cdots\\ a_{n+1}-a_n&=f(n)\end{aligned}$$

两边分别相加得 $a_{n+1}-a_1=\sum_{k=1}^{n}f(n)$

**例 1** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+2n+1$，$a_1=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：由$a_{n+1}=a_n+2n+1$得$a_{n+1}-a_n=2n+1$则

$$
\begin{aligned}
a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1 \\
&= [2(n-1)+1] + [2(n-2)+1] + \cdots + (2\times 2+1) + (2\times 1+1) + 1 \\
&= 2[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1] + (n-1) + 1 \\
&= 2\frac{(n-1)n}{2} + (n-1) + 1 \\
&= (n-1)(n+1) + 1 \\
&= n^2
\end{aligned}
$$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = n^2$。

**例 2** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1} = a_n + 2\times 3^n + 1$，$a_1 = 3$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解法一：由$a_{n+1} = a_n + 2\times 3^n + 1$得$a_{n+1} - a_n = 2\times 3^n + 1$则

$$
\begin{aligned}
a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1 \\
&= (2\times 3^{n-1} + 1) + (2\times 3^{n-2} + 1) + \cdots + (2\times 3^2 + 1) + (2\times 3^1 + 1) + 3 \\
&= 2(3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3^1) + (n-1) + 3 \\
&= 2\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} + (n-1) + 3 \\
&= 3^n - 3 + n - 1 + 3 \\
&= 3^n + n - 1
\end{aligned}
$$

所以$a_n = 3^n + n - 1$.

解法二：$a_{n+1} = 3a_n + 2\times 3^n + 1$两边除以$3^{n+1}$，得$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3^{n+1}}$，

则$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^{n+1}}$，故

$$\frac{a_n}{3^n}=(\frac{a_n}{3^n}-\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}})+(\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}}-\frac{a_{n-2}}{3^{n-2}})+(\frac{a_{n-2}}{3^{n-2}}-\frac{a_{n-3}}{3^{n-3}})+\cdots+(\frac{a_2}{3^2}-\frac{a_1}{3^1})+\frac{a_1}{3}$$

$$=(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^n})+(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^{n-1}})+(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^{n-2}})+\cdots+(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2})+\frac{3}{3}$$

$$=\frac{2(n-1)}{3}+(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{3^2})+1$$

因此 $\frac{a_n}{3^n}=\frac{2(n-1)}{3}+\frac{\frac{1}{3^n}(1-3^{n-1})}{1-3}+1=\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$，

则 $a_n=\frac{2}{3}\cdot n\cdot 3^n+\frac{1}{2}\cdot 3^n-\frac{1}{2}$.

**练习 1**.已知数列$\{a_n\}$的首项为 1，且$a_{n+1}=a_n+2n(n\in N^*)$写出数列$\{a_n\}$的通项公式.　　　　答案：$n^2-n+1$

**练习 2**.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n(n-1)}(n\geq 2)$，求此数列的通项公式.　　　　答案：裂项求和　$a_n=2-\frac{1}{n}$

**评注**：已知$a_1=a,a_{n+1}-a_n=f(n)$，其中 f(n)可以是关于 n 的一次函数、二次函数、指数函数、分式函数，求通项$a_n$.

①若 f(n)是关于 n 的一次函数，累加后可转化为等差数列求和;

②若 f(n)是关于 n 的二次函数，累加后可分组求和;

③若 f(n)是关于 n 的指数函数，累加后可转化为等比数列求和;

④若 f(n)是关于 n 的分式函数，累加后可裂项求和。

**例 3**.已知数列$\{a_n\}$中，$a_n>0$且$S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{n}{a_n})$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解:由已知$S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{n}{a_n})$得$S_n=\frac{1}{2}(S_n-S_{n-1}+\frac{n}{S_n-S_{n-1}})$,

化简有$S_n^2-S_{n-1}^2=n$,由类型(1)有$S_n^2=S_1^2+2+3+\cdots+n$,

又$S_1=a_1$得$a_1=1$,所以$S_n^2=\frac{n(n+1)}{2}$,又$a_n>0$,$s_n=\frac{\sqrt{2n(n+1)}}{2}$,

则$a_n=\frac{\sqrt{2n(n+1)}-\sqrt{2n(n-1)}}{2}$

此题也可以用数学归纳法来求解.

## 二、累乘法

**1.适用于：** $a_{n+1}=f(n)a_n$ ----------这是广义的等比数列

累乘法是最基本的二个方法之二。

2．若$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$，则$\frac{a_2}{a_1}=f(1),\frac{a_3}{a_2}=f(2)\cdots\cdots\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$

两边分别相乘得，$\frac{a_{n+1}}{a_1}=a_1\prod_{k=1}^{n}f(k)$

**例 4** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2(n+1)5^n\times a_n$，$a_1=3$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：因为$a_{n+1}=2(n+1)5^n\times a_n$，$a_1=3$，所以$a_n\neq 0$，则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2(n+1)5^n$，故

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1$$

$$=[2(n-1+1)5^{n-1}][2(n-2+1)5^{n-2}]\cdots[2(2+1)\cdot5^2][2(1+1)\cdot5^1]\cdot3$$

$$=2^{n-1}[n(n-1)\cdots3\cdot2]\cdot5^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}\cdot3$$

$$=3\cdot2^{n-1}\cdot5^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n!$$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3\cdot2^{n-1}\cdot5^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n!$.

**例 5**.设$\{a_n\}$是首项为 1 的正项数列，且$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$（$n$=1，2， 3，…），则它的通项公式是$a_n$=________.

解：已知等式可化为：$(a_{n+1}+a_n)[(n+1)a_{n+1}-na_n]=0$

$\because a_n>0(n\in N^*)$，$\therefore$ (n+1)$a_{n+1}-na_n=0$， 即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$

$\therefore n\geq2$时，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}$

$\therefore a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{n}$.

**评注：** 本题是关于$a_n$和$a_{n+1}$的二次齐次式，可以通过因式分解（一般情况时用求根公式）得到$a_n$与$a_{n+1}$的更为明显的关系式，从而求出$a_n$.

练习.已知$a_{n+1}=na_n+n-1,a_1>-1$,求数列{an}的通项公式.

答案：$a_n=(n-1)!(a_1+1)-1$.

**评注：本题解题的关键是把原来的递推关系式$a_{n+1}=na_n+n-1$,转化为**

$a_{n+1}+1=n(a_n+1)$,若令$b_n=a_n+1$,则问题进一步转化为$b_{n+1}=nb_n$形式,进而应用累乘法求出数列的通项公式.

## 三、待定系数法　适用于$a_{n+1}=qa_n+f(n)$

基本思路是转化为等差数列或等比数列,而数列的本质是一个函数,其定义域是自然数集的一个函数。

1．形如$a_{n+1}=ca_n+d,(c\neq 0$,其中$a_1=a$)型

（1）若 c=1 时,数列{$a_n$}为等差数列;

（2）若 d=0 时,数列{$a_n$}为等比数列;

（3）若$c\neq 1$且$d\neq 0$时,数列{$a_n$}为线性递推数列,其通项可通过待定系数法构造辅助数列来求.

待定系数法:设$a_{n+1}+\lambda=c(a_n+\lambda)$,

得$a_{n+1}=ca_n+(c-1)\lambda$,与题设$a_{n+1}=ca_n+d$,比较系数得

$(c-1)\lambda=d$,所以$\lambda=\dfrac{d}{c-1},(c\neq 0)$所以有:$a_n+\dfrac{d}{c-1}=c(a_{n-1}+\dfrac{d}{c-1})$

因此数列$\left\{a_n+\dfrac{d}{c-1}\right\}$构成以$a_1+\dfrac{d}{c-1}$为首项,以 c 为公比的等比数列,

所以 $a_n+\dfrac{d}{c-1}=(a_1+\dfrac{d}{c-1})\cdot c^{n-1}$　即:$a_n=(a_1+\dfrac{d}{c-1})\cdot c^{n-1}-\dfrac{d}{c-1}$.

规律:将递推关系$a_{n+1}=ca_n+d$化为$a_{n+1}+\dfrac{d}{c-1}=c(a_n+\dfrac{d}{c-1})$,构造成公

比为c的等比数列$\{a_n+\frac{d}{c-1}\}$从而求得通项公式$a_{n+1}=\frac{d}{1-c}+c^{n-1}(a_1+\frac{d}{c-1})$

逐项相减法（阶差法）：有时我们从递推关系$a_{n+1}=ca_n+d$中把n换成n-1有$a_n=ca_{n-1}+d$,两式相减有$a_{n+1}-a_n=c(a_n-a_{n-1})$从而化为公比为c的等比数列$\{a_{n+1}-a_n\}$,进而求得通项公式. $a_{n+1}-a_n=c^n(a_2-a_1)$,再利用类型(1)即可求得通项公式.我们看到此方法比较复杂.

**例 6** 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_n=2a_{n-1}+1(n\geq 2)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解法一：$\because a_n=2a_{n-1}+1(n\geq 2),$

$\therefore a_n+1=2(a_{n-1}+1)$

又$\because a_1+1=2,\therefore \{a_n+1\}$是首项为2，公比为2的等比数列

$\therefore a_n+1=2^n$，即$a_n=2^n-1$

解法二：$\because a_n=2a_{n-1}+1(n\geq 2),$

$\therefore a_{n+1}=2a_n+1$

两式相减得$a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})(n\geq 2)$，故数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列，再用累加法的……

练习．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$,求通项$a_n$。

答案：$a_n=(\frac{1}{2})^{n-1}+1$

2．形如：$a_{n+1}=p\cdot a_n+q^n$　　(其中q是常数，且n$\neq$0,1)

①若 p=1 时，即：$a_{n+1}=a_n+q^n$，累加即可.

②若 $p\neq1$ 时，即：$a_{n+1}=p\cdot a_n+q^n$，

求通项方法有以下三种方向：i. 两边同除以 $p^{n+1}$.目的是把所求数列构造成等差数列

即：$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{q^n}+\dfrac{1}{p}\cdot(\dfrac{p}{q})^n$,令 $b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$，则 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{p}\cdot(\dfrac{p}{q})^n$,然后类型1，累加求通项.

ii.两边同除以 $q^{n+1}$ . 目的是把所求数列构造成等差数列。

即：$\dfrac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{a_n}{q^n}+\dfrac{1}{q}$,

令 $b_n=\dfrac{a_n}{q^n}$,则可化为 $b_{n+1}=\dfrac{p}{q}\cdot b_n+\dfrac{1}{q}$.然后转化为类型 5 来解，

iii.待定系数法：目的是把所求数列构造成等差数列

设 $a_{n+1}+\lambda\cdot q^{n+1}=p(a_n+\lambda\cdot p^n)$.通过比较系数，求出 λ，转化为等比数列求通项.

注意：应用待定系数法时，要求 p≠q，否则待定系数法会失效。

**例 7** 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n+4\cdot3^{n-1}$，$a_1=1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解法一（待定系数法）：设 $a_{n+1}+\lambda_1 3^n=\lambda_2(a_n+\lambda\cdot3^{n-1})$，比较系数得 $\lambda_1=-4,\lambda_2=2$，

则数列 $\{a_n-4\cdot3^{n-1}\}$ 是首项为 $a_1-4\cdot3^{1-1}=-5$，公比为 2 的等比数列，

所以$a_n - 4\cdot 3^{n-1} = -5\cdot 2^{n-1}$，即$a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 5\cdot 2^{n-1}$

解法二（两边同除以$q^{n+1}$）：　两边同时除以$3^{n+1}$得：$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n} + \frac{4}{3^2}$，下面解法略

解法三（两边同除以$p^{n+1}$）：　两边同时除以$2^{n+1}$得：$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{4}{3}\cdot(\frac{3}{2})^n$，下面解法略

练习.（2003天津理）

设$a_0$为常数，且$a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$ $(n\in N)$．证明对任意$n\geqslant 1$，$a_n = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1}\cdot 2^n] + (-1)^n\cdot 2^n a_0$；

3．形如$a_{n+1} = pa_n + kn + b$　　　(其中k,b是常数，且$k\neq 0$)

方法1：逐项相减法（阶差法）

方法2：待定系数法

通过凑配可转化为　$(a_n + xn + y) = p(a_{n-1} + x(n-1) + y)$;

解题基本步骤：

1、确定$f(n)$=kn+b

2、设等比数列$b_n = (a_n + xn + y)$，公比为p

3、列出关系式$(a_n + xn + y) = p(a_{n-1} + x(n-1) + y)$,即$b_n = pb_{n-1}$

4、比较系数求x,y

5、解得数列$(a_n+xn+y)$的通项公式

6、解得数列$\{a_n\}$ 的通项公式

**例 8** 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_{n+1}=3a_n+2n,$求通项$a_n$.（逐项相减法）

解：，$a_{n+1}=3a_n+2n,$ ①

$\therefore$ $n\geq 2$时，$a_n=3a_{n-1}+2(n-1)$，

两式相减得 $a_{n+1}-a_n=3(a_n-a_{n-1})+2$.令$b_n=a_{n+1}-a_n$,则$b_n=3b_{n-1}+2$

利用类型 5 的方法知 $b_n=5\cdot 3^{n-1}+2$ 即 $a_{n+1}-a_n=5\cdot 3^{n-1}-1$ ②

再由累加法可得$a_n=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-n-\frac{1}{2}$. 亦可联立 ① ②解出 $a_n=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-n-\frac{1}{2}$.

**例 9**. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{3}{2},2a_n-a_{n-1}=6n-3$,求通项$a_n$.（待定系数法）

解：原递推式可化为$2(a_n+xn+y)=a_{n-1}+x(n-1)++y$

比较系数可得：x=-6,y=9,上式即为$2b_n=b_{n-1}$

所以$\{b_n\}$是一个等比数列，首项$b_1=a_1-6n+9=\frac{9}{2}$,公比为$\frac{1}{2}$.

$\therefore b_n=\frac{9}{2}(\frac{1}{2})^{n-1}$ 即：$a_n-6n+9=9\cdot(\frac{1}{2})^n$

故$a_n=9\cdot(\frac{1}{2})^n+6n-9$.

4．形如$a_{n+1}=pa_n+a\cdot n^2+b\cdot n+c$　　　(其中 a,b,c 是常数，且$a\neq 0$)

基本思路是转化为等比数列，而数列的本质是一个函数，其定义域是自然数集的一个函数。

**例 10** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n+3n^2+4n+5$，$a_1=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：设$a_{n+1}+x(n+1)^2+y(n+1)+z=2(a_n+xn^2+yn+z)$

比较系数得$x=3, y=10, z=18$，

所以$a_{n+1}+3(n+1)^2+10(n+1)+18=2(a_n+3n^2+10n+18)$

由$a_1+3\times 1^2+10\times 1+18=1+31=32\neq 0$，得$a_n+3n^2+10n+18\neq 0$

则$\dfrac{a_{n+1}+3(n+1)^2+10(n+1)+18}{a_n+3n^2+10n+18}=2$，故数列$\{a_n+3n^2+10n+18\}$为以

$a_1+3\times 1^2+10\times 1+18=1+31=32$为首项，以 2 为公比的等比数列，因此

$a_n+3n^2+10n+18=32\times 2^{n-1}$，则$a_n=2^{n+4}-3n^2-10n-18$。

**5.形如$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$时将$a_n$作为$f(n)$求解**

分析：原递推式可化为$a_{n+2}+\lambda a_{n+1}=(p+\lambda)(a_{n+1}+\lambda a_n)$的形式，比较系数可求得$\lambda$，数列$\{a_{n+1}+\lambda a_n\}$为等比数列。

**例 11** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n, a_1=-1, a_2=2$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：设 $a_{n+2}+\lambda a_{n+1}=(5+\lambda)(a_{n+1}+\lambda a_n)$

比较系数得 $\lambda=-3$ 或 $\lambda=-2$，不妨取 $\lambda=-2$，（取-3 结果形式可能不同，但本质相同）

则 $a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$，则 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是首项为 4，公比为 3 的等比数列

$\therefore a_{n+1}-2a_n=4\times 3^{n-1}$，所以 $a_n=4\cdot 3^{n-1}-5\cdot 2^{n-1}$

练习.数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=8, a_2=2$,且满足 $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$,求 $a_n$.

答案： $a_n=11-3^n$.

四、迭代法　$a_{n+1}=pa_n^r$(其中 p,r 为常数)型

**例 12** 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^{3(n+1)2^n}$，$a_1=5$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解：因为 $a_{n+1}=a_n^{3(n+1)2^n}$，所以

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1}^{3n\cdot 2^{n-1}}=[a_{n-2}^{3(n-1)\cdot 2^{n-2}}]^{3n\cdot 2^{n-1}}=a_{n-2}^{3^2(n-1)\cdot n\cdot 2^{(n-2)+(n-1)}}\\
&=[a_{n-3}^{3(n-2)\cdot 2^{n-3}}]^{3^2(n-1)\cdot n\cdot 2^{(n-2)+(n-1)}}\\
&=a_{n-3}^{3^3(n-2)(n-1)n\cdot 2^{(n-3)+(n-2)+(n-1)}}\\
&=\cdots\\
&=a_1^{3^{n-1}\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot 2^{1+2+\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)}}\\
&=a_1^{3^{n-1}\cdot n!\cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}
\end{aligned}
$$

又 $a_1=5$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=5^{3^{n-1}\cdot n!\cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$。

注：本题还可综合利用累乘法和对数变换法求数列的通项公式。

**例 13.**（2005 江西卷）

已知数列 $\{a_n\}$的各项都是正数,且满足: $a_0=1, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(4-a_n), n\in N$，

（1）证明$a_n < a_{n+1} < 2, n \in N$;　　（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式 an.

解：（1）略（2）$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n(4 - a_n) = \frac{1}{2}[-(a_n - 2)^2 + 4]$, 所以

$2(a_{n+1} - 2) = -(a_n - 2)^2$

令$b_n = a_n - 2$, 则$b_n = -\frac{1}{2}b_{n-1}^2 = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}b_{n-2}^2)^2 = -\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2 b_{n-1}^{2^2} = \cdots = -(\frac{1}{2})^{1+2+\cdots+2^{n-1}} b_n^{2^n}$ 又 bn=—1，所以$b_n = -(\frac{1}{2})^{2^n - 1}$, 即$a_n = 2 + b_n = 2 - (\frac{1}{2})^{2^n - 1}$.

方法 2：本题用归纳-猜想-证明，也很简捷，请试一试.解法 3：设 c$_n = -b_n$，则 c$_n = \frac{1}{2}c_{n-1}^2$,转化为上面类型（1）来解

五、对数变换法　适用于$a_{n+1} = pa_n^r$(其中 p,r 为常数)型　　p>0，$a_n > 0$

**例 14.** 设正项数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 1$，$a_n = 2a_{n-1}^2$（n≥2）.求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解：两边取对数得：$\log_2^{a_n} = 1 + 2\log_2^{a_{n-1}}$，$\log_2^{a_n} + 1 = 2(\log_2^{a_{n-1}} + 1)$，设

$b_n = \log_2^{a_n} + 1$，则$b_n = 2b_{n-1}$　　$\{b_n\}$是以 2 为公比的等比数列，

$b_1 = \log_2^1 + 1 = 1$　　$b_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$，$\log_2^{a_n} + 1 = 2^{n-1}$，$\log_2^{a_n} = 2^{n-1} - 1$，∴

$a_n = 2^{2^{n-1} - 1}$

**练习** 数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，$a_n = 2\sqrt{a_{n-1}}$（n≥2），求数列$\{a_n\}$的通项公式.

答案：$a_n = 2^{2 - 2^{2-n}}$

**例 15** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2\times3^n\times a_n^5$，$a_1=7$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：因为$a_{n+1}=2\times3^n\times a_n^5$，$a_1=7$，所以$a_n>0$，$a_{n+1}>0$。

两边取常用对数得$\lg a_{n+1}=5\lg a_n+n\lg3+\lg2$

设$\lg a_{n+1}+x(n+1)+y=5(\lg a_n+xn+y)$　（同类型四）

比较系数得，$x=\dfrac{\lg3}{4},y=\dfrac{\lg3}{16}+\dfrac{\lg2}{4}$

由$\lg a_1+\dfrac{\lg3}{4}\times1+\dfrac{\lg3}{16}+\dfrac{\lg2}{4}=\lg7+\dfrac{\lg3}{4}\times1+\dfrac{\lg3}{16}+\dfrac{\lg2}{4}\neq0$，得$\lg a_n+\dfrac{\lg3}{4}n+\dfrac{\lg3}{16}+\dfrac{\lg2}{4}\neq0$，

所以数列$\{\lg a_n+\dfrac{\lg3}{4}n+\dfrac{\lg3}{16}+\dfrac{\lg2}{4}\}$是以$\lg7+\dfrac{\lg3}{4}+\dfrac{\lg3}{16}+\dfrac{\lg2}{4}$为首项，以 5 为公比的等比数列，则$\lg a_n+\dfrac{\lg3}{4}n+\dfrac{\lg3}{16}+\dfrac{\lg2}{4}=(\lg7+\dfrac{\lg3}{4}+\dfrac{\lg3}{16}+\dfrac{\lg2}{4})5^{n-1}$，因此

$$\lg a_n=(\lg7+\frac{\lg3}{4}+\frac{\lg3}{16}+\frac{\lg2}{4})5^{n-1}-\frac{\lg3}{4}n-\frac{\lg3}{6}-\frac{\lg2}{4}$$

$$=[\lg(7\times3^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{16}}\times2^{\frac{1}{4}})]5^{n-1}-\lg(3^{\frac{n}{4}}\times3^{\frac{1}{16}}\times2^{\frac{1}{4}})$$

$$=\lg(7\times3^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{16}}\times2^{\frac{1}{4}})^{5^{n-1}}-\lg(3^{\frac{n}{4}}\times3^{\frac{1}{16}}\times2^{\frac{1}{4}})$$

$$=\lg(7^{5^{n-1}}\times3^{\frac{5^n-4n-1}{16}}\times2^{\frac{5^{n-1}-1}{4}})$$

则$a_n=7^{5^{n-1}}\times3^{\frac{5^n-4n-1}{16}}\times2^{\frac{5^{n-1}-1}{4}}$。

## 六、倒数变换法　适用于分式关系的递推公式，分子只有一项

**例 16** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2},a_1=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：求倒数得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$，$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$，$\therefore\left\{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，首项$\frac{1}{a_1}=1$，公差为$\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}(n+1)$，$\therefore a_n=\frac{2}{n+1}$

## 七、换元法　适用于含根式的递推关系

**例 17** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$，$a_1=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：令$b_n=\sqrt{1+24a_n}$，则$a_n=\frac{1}{24}(b_n^2-1)$

代入$a_{n+1}=\frac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$得

$\frac{1}{24}(b_{n+1}^2-1)=\frac{1}{16}[1+4\frac{1}{24}(b_n^2-1)+b_n]$

即$4b_{n+1}^2=(b_n+3)^2$

因为$b_n=\sqrt{1+24a_n}\geq 0$，

则$2b_{n+1}=b_n+3$，即$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$，

可化为$b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$，

所以$\{b_n-3\}$是以$b_1-3=\sqrt{1+24a_1}-3=\sqrt{1+24\times 1}-3=2$为首项，以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，因此$b_n-3=2(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^{n-2}$，则$b_n=(\frac{1}{2})^{n-2}+3$，即$\sqrt{1+24a_n}=(\frac{1}{2})^{n-2}+3$，得

$a_n=\frac{2}{3}(\frac{1}{4})^n+(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{3}$。

## 八、数学归纳法　通过首项和递推关系式求出数列的前 n 项，猜出数列的通项公式，再用数学归纳法加以证明。

**例 18** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+\dfrac{8(n+1)}{(2n+1)^2(2n+3)^2}$，$a_1=\dfrac{8}{9}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：由$a_{n+1}=a_n+\dfrac{8(n+1)}{(2n+1)^2(2n+3)^2}$及$a_1=\dfrac{8}{9}$，得

$$a_2=a_1+\frac{8(1+1)}{(2\times1+1)^2(2\times1+3)^2}=\frac{8}{9}+\frac{8\times2}{9\times25}=\frac{24}{25}$$
$$a_3=a_2+\frac{8(2+1)}{(2\times2+1)^2(2\times2+3)^2}=\frac{24}{25}+\frac{8\times3}{25\times49}=\frac{48}{49}$$
$$a_4=a_3+\frac{8(3+1)}{(2\times3+1)^2(2\times3+3)^2}=\frac{48}{49}+\frac{8\times4}{49\times81}=\frac{80}{81}$$

由此可猜测$a_n=\dfrac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}$，下面用数学归纳法证明这个结论。

（1）当$n=1$时，$a_1=\dfrac{(2\times1+1)^2-1}{(2\times1+1)^2}=\dfrac{8}{9}$，所以等式成立。

（2）假设当$n=k$时等式成立，即$a_k=\dfrac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}$，则当$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\&=\frac{[(2k+1)^2-1](2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\&=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+1)^2}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\&=\frac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2}\\&=\frac{[2(k+1)+1]^2-1}{[2(k+1)+1]^2}\end{aligned}$$

由此可知，当$n=k+1$时等式也成立。

根据（1），（2）可知，等式对任何$n\in N^*$都成立。

## 九、阶差法（逐项相减法）

### 1、递推公式中既有$S_n$，又有$a_n$

分析：把已知关系通过$a_n=\begin{cases}S_1, n=1\\ S_n-S_{n-1}, n\geq 2\end{cases}$转化为数列$\{a_n\}$或$S_n$的递推关系，然后采用相应的方法求解。

**例 19** 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且前 n 项和$S_n$满足$S_n=\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$，且$a_2,a_4,a_9$成等比数列，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：∵对任意$n\in N^+$有$S_n=\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$ (1)

∴当 n=1 时，$S_1=a_1=\frac{1}{6}(a_1+1)(a_1+2)$，解得$a_1=1$或$a_1=2$

当 n≥2 时，$S_{n-1}=\frac{1}{6}(a_{n-1}+1)(a_{n-1}+2)$ (2)

(1)-(2) 整理得：$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-3)=0$

∵$\{a_n\}$各项均为正数，∴$a_n-a_{n-1}=3$

当$a_1=1$时，$a_n=3n-2$，此时$a_4^2=a_2a_9$成立

当$a_1=2$时，$a_n=3n-1$，此时$a_4^2=a_2a_9$不成立，故$a_1=2$舍去

所以$a_n=3n-2$

**练习。** 已知数列$\{a_n\}$中，$a_n>0$且$S_n=\frac{1}{2}(a_n+1)^2$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

答案：$S_n-S_{n-1}=a_n$ $(a_n-1)^2=(a_{n-1}+1)^2$ $a_n=2n-1$

### 2、对无穷递推数列

**例 20** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}(n\geq 2)$，求$\{a_n\}$

的通项公式。

解：因为$a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} (n \geq 2)$ ①

所以$a_{n+1} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n$ ②

用②式－①式得$a_{n+1} - a_n = na_n$.

则$a_{n+1} = (n+1)a_n (n \geq 2)$ 故$\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1 (n \geq 2)$

所以$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot a_2 = [n(n-1) \cdots 4 \times 3]a_2 = \frac{n!}{2}a_2$. ③

由$a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} (n \geq 2)$，取$n=2$得$a_2 = a_1 + 2a_2$，则$a_2 = a_1$，又知$a_1 = 1$，则$a_2 = 1$，代入③得$a_n = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n = \frac{n!}{2}$。

所以，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = \frac{n!}{2}$.

## 十、不动点法　　目的是将递推数列转化为等比（差）数列的方法

**不动点的定义：函数$f(x)$的定义域为$D$，若存在$f(x)x_0 \in D$，使$f(x_0) = x_0$成立，则称$x_0$为$f(x)$的不动点或称$(x_0, f(x_0))$为函数$f(x)$的不动点。**

分析：由$f(x) = x$求出不动点$x_0$，在递推公式两边同时减去$x_0$，在变形求解。

### 类型一：形如$a_{n+1} = qa_n + d$

**例 21** 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 1 (n \geq 2)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：递推关系是对应得递归函数为$f(x) = 2x + 1$，由$f(x) = x$得，不动点

为-1

$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$， ……

**类型二：形如 $a_{n+1}=\dfrac{a\cdot a_n+b}{c\cdot a_n+d}$**

分析：递归函数为 $f(x)=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$

（1）若有两个相异的不动点 p,q 时，将递归关系式两边分别减去不动点 p,q，再将两式相除得 $\dfrac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q}=k\cdot\dfrac{a_n-p}{a_n-q}$，其中 $k=\dfrac{a-pc}{a-qc}$，∴

$a_n=\dfrac{(a_1q-pq)k^{n-1}-(a_1p-pq)}{(a_1-p)k^{n-1}-(a_1-q)}$

（2）若有两个相同的不动点 p，则将递归关系式两边减去不动点 p，然后用 1 除，得 $\dfrac{1}{a_{n+1}-p}=\dfrac{1}{a_n-p}+k$，其中 $k=\dfrac{2c}{a+d}$。

**例 22.** 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{5a_n+4}{2a_n+7}$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析：此类问题常用参数法化等比数列求解.

解：对等式两端同时加参数 t, 得：

$$a_{n+1}+t=\frac{5a_n+4}{2a_n+7}+t=\frac{(2t+5)a_n+7t}{2a_n+7}=(2t+5)\frac{a_n+\frac{7t+4}{2t+5}}{2a_n+7},$$

令 $t=\dfrac{7t+4}{2t+5}$， 解之得 t=1, −2 代入 $a_{n+1}+t=(2t+5)\dfrac{a_n+t}{2a_n+7}$ 得

$a_{n+1}-1=3\dfrac{a_n-1}{2a_n+7}$，$a_{n+1}+2=9\dfrac{a_n+2}{2a_n+7}$，

相除得 $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n+2}$，即 $\{\dfrac{a_n-1}{a_n+2}\}$ 是首项为 $\dfrac{a_1-1}{a_1+2}=\dfrac{1}{4}$，

公比为 $\dfrac{1}{3}$ 的等比数列， $\dfrac{a_n-1}{a_n+2}=\dfrac{1}{4}\cdot 3^{1-n}$， 解得 $a_n=\dfrac{4\cdot 3^{n-1}+2}{4\cdot 3^{n-1}-1}$.

方法2：…，

$a_{n+1}-1=3\dfrac{a_n-1}{2a_n+7}$，

两边取倒数得$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{2a_n+7}{3(a_n-1)}=\dfrac{2(a_n-1)+9}{3(a_n-1)}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{a_n-1}$，

令$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$，则$b_n=-\dfrac{2}{3}+3b_n$，…，转化为累加法来求.

**例 23** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{21a_n-24}{4a_n+1}$，$a_1=4$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解：令$x=\dfrac{21x-24}{4x+1}$，得$4x^2-20x+24=0$，则$x_1=2, x_2=3$是函数$f(x)=\dfrac{21x-24}{4x+1}$的两个不动点。因为

$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-3}=\dfrac{\dfrac{21a_n-24}{4a_n+1}-2}{\dfrac{21a_n-24}{4a_n+1}-3}=\dfrac{21a_n-24-2(4a_n+1)}{21a_n-24-3(4a_n+1)}=\dfrac{13a_n-26}{9a_n-27}=\dfrac{13}{9}\dfrac{a_n-2}{a_n-3}$。所以数列

$\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-3}\right\}$是以$\dfrac{a_1-2}{a_1-3}=\dfrac{4-2}{4-3}=2$为首项，以$\dfrac{13}{9}$为公比的等比数列，故

$\dfrac{a_n-2}{a_n-3}=2(\dfrac{13}{9})^{n-1}$，则$a_n=\dfrac{1}{2(\dfrac{13}{9})^{n-1}-1}+3$。

**练习 1**：已知$\{a_n\}$满足$a_1=2, a_n=\dfrac{a_{n-1}+2}{2a_{n-1}+1}(n\geq 2)$，求$\{a_n\}$的通项$a_n$

答案：$\therefore a_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{3^n+(-1)^n}$

**练习 2。**已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{2a_n-1}{4a_n+6}(n\in N^*)$，求数列$\{a_n\}$的通项$a_n$

答案：$\therefore a_n=\dfrac{13-5n}{10n-6}$

**练习 3.**（2009 陕西卷文）

已知数列$\{a_n\}$满足，$a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}, n\in N^*$.

(I) 令$b_n=a_{n+1}-a_n$，证明：$\{b_n\}$是等比数列；

(II)求$\{a_n\}$的通项公式。

答案：（1）$\{b_n\}$是以1为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列。（2）$a_n=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}(n\in N^*)$。

## 十一。**特征方程法　形如$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n(p,q$是常数）的数列**

形如$a_1=m_1, a_2=m_2, a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n(p,q$是常数）的二阶递推数列都可用特征根法求得通项$a_n$，其特征方程为$x^2=px+q$ …①

若①有二异根$\alpha,\beta$，则可令$a_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n(c_1,c_2$是待定常数）

若①有二重根$\alpha=\beta$，则可令$a_n=(c_1+nc_2)\alpha^n(c_1,c_2$是待定常数）

再利用$a_1=m_1, a_2=m_2$,可求得$c_1,c_2$，进而求得$a_n$

**例 24** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2, a_2=3, a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n(n\in N^*)$，求数列$\{a_n\}$的通项$a_n$

**解：** 其特征方程为$x^2=3x-2$，解得$x_1=1, x_2=2$，令$a_n=c_1\cdot 1^n+c_2\cdot 2^n$，

由$\begin{cases} a_1=c_1+2c_2=2 \\ a_2=c_1+4c_2=3 \end{cases}$，得$\begin{cases} c_1=1 \\ c_2=\frac{1}{2} \end{cases}$，　　$\therefore a_n=1+2^{n-1}$

**例 25** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_2=2, 4a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$，求数列$\{a_n\}$的通项$a_n$

**解：** 其特征方程为$4x^2=4x-1$，解得$x_1=x_2=\frac{1}{2}$，令$a_n=(c_1+nc_2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

由$\begin{cases} a_1=(c_1+c_2)\times\frac{1}{2}=1 \\ a_2=(c_1+2c_2)\times\frac{1}{4}=2 \end{cases}$，得$\begin{cases} c_1=-4 \\ c_2=6 \end{cases}$，　　$\therefore a_n=\frac{3n-2}{2^{n-1}}$

**练习 1．** 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2,4a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n-1(n\in N^*)$，求数列$\{a_n\}$的通项

**练习 2.** 已知数列$\{a_n\}$满足

$a_1=1,a_2=2,4a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n-n-4(n\in N^*)$，求数列$\{a_n\}$的通项

**说明：**(1)若方程$x^2=px+q$有两不同的解 s，t,

则$a_{n+1}-ta_n=s(a_n-ta_{n-1})$，$a_{n+1}-sa_n=t(a_n-sa_{n-1})$，

由等比数列性质可得$a_{n+1}-ta_n=(a_2-ta_1)s^{n-1}$，$a_{n+1}-sa_n=(a_2-sa_1)t^{n-1}$，

$\because t\neq s$，由上两式消去$a_{n+1}$可得$a_n=\dfrac{(a_2-ta_1)}{s(s-t)}.s^n-\dfrac{a_2-sa_1}{t(s-t)}.t^n$.

(2)若方程$x^2=px+q$有两相等的解$s=t$，则

$$a_{n+1}-ta_n=s(a_n-ta_{n-1})=s^2(a_{n-1}-ta_{n-2})=\ldots=s^{n-1}(a_2-ta_1),$$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{s^{n+1}}-\dfrac{a_n}{s^n}=\dfrac{a_2-ta_1}{s^2}$,即$\left\{\dfrac{a_n}{s^n}\right\}$是等差数列,

由等差数列性质可知$\dfrac{a_n}{s^n}=\dfrac{a_1}{s}+(n-1).\dfrac{a_2-sa_1}{s^2}$，

所以$a_n=\left[\left(\dfrac{a_1}{s}-\dfrac{a_2-sa_1}{s^2}\right)+\dfrac{a_2-sa_1}{s^2}.n\right]s^n$.

**例 26**、数列$\{a_n\}$满足$a_1=-\dfrac{5}{12}$，且$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2-\frac{25}{4}}{2a_n+\frac{29}{4}}$求数列$\{a_n\}$的通项。

解：$a_{n+1}+\lambda=a_{n+1}=\dfrac{a_n^2-\frac{25}{4}}{2a_n+\frac{29}{4}}+\lambda=\dfrac{a_n^2+2\lambda a_n+\frac{29}{4}\lambda-\frac{25}{4}}{2a_n+\frac{29}{4}}$ ……①

令$\lambda^2=\dfrac{29\lambda-25}{4}$，解得$\lambda_1=1,\lambda_2=\dfrac{25}{4}$，将它们代回①得，

$a_{n+1}+1=\dfrac{(a_n+1)^2}{2a_n+\frac{29}{4}}$ ……②， $a_{n+1}+\dfrac{25}{4}=\dfrac{\left(a_n+\frac{25}{4}\right)^2}{2a_n+\frac{29}{4}}$ ……③，

③÷②，得 $\dfrac{a_{n+1}+\frac{25}{4}}{a_{n+1}+1}=\left(\dfrac{a_n+\frac{25}{4}}{a_n+1}\right)^2$，

则 $\lg\dfrac{a_{n+1}+\frac{25}{4}}{a_{n+1}+1}=2\lg\dfrac{a_n+\frac{25}{4}}{a_n+1}$， ∴数列 $\left\{\lg\dfrac{a_n+\frac{25}{4}}{a_n+1}\right\}$ 成等比数列，首项为 1，公比 $q=2$

所以 $\lg\dfrac{a_n+\frac{25}{4}}{a_n+1}=2^{n-1}$， 则 $\dfrac{a_n+\frac{25}{4}}{a_n+1}=10^{2^{n-1}}$， $\therefore a_n=\dfrac{\frac{25}{4}-10^{2^{n-1}}}{10^{2^{n-1}}-1}$

## 十二、四种基本数列

**1. 形如 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 型　　等差数列的广义形式，见累加法。**

**2. 形如 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 型　等比数列的广义形式，见累乘法。**

**3. 形如 $a_{n+1}+a_n=f(n)$ 型**

（1）若 $a_{n+1}+a_n=d$ （d 为常数），则数列 $\{a_n\}$ 为“等和数列”，它是一个周期数列，周期为 2，其通项分奇数项和偶数项来讨论;

（2）若 f(n) 为 n 的函数（非常数）时，可通过构造转化为 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 型，通过累加来求出通项;或用逐差法(两式相减)得 $a_{n+1}-a_{n-1}=f(n)-f(n-1)$，，分奇偶项来分求通项.

例 27. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$，$a_{n+1}+a_n=2n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析 1：构造 转化为 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 型

解法 1：令 $b_n=(-1)^n a_n$

则 $b_{n+1}-b_n=(-1)^{n+1}a_{n+1}-(-1)^n a_n=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+a_n)=(-1)^{n+1}\cdot 2n$.

$n\geq 2$ 时，$\begin{cases} b_n-b_{n-1}=(-1)^n\cdot 2(n-1) \\ b_{n-1}-b_{n-2}=(-1)^{n-1}\cdot 2(n-2) \\ \cdots\cdots \\ b_2-b_1=(-1)^2\cdot 2\times 1 \\ b_1=-a_1=0 \end{cases}$，各式相加：

$b_n=2\left[(-1)^n(n-1)+(-1)^{n-1}(n-2)+\cdots+(-1)^3\cdot 2+(-1)^2\cdot 1\right]$

当 n 为偶数时，$b_n=2\left[(n-1)+(-1)\cdot\frac{n-2}{2}\right]=n$. 此时 $a_n=b_n=n$ 当 n 为奇数时，$b_n=2(-\frac{n-1}{2})=-n+1$

此时 $b_n=-a_n$，所以 $a_n=n-1$. 故 $a_n=\begin{cases} n-1, n\text{为奇数}, \\ n, n\text{为偶数}. \end{cases}$ 解法 2：$\because$ $a_{n+1}+a_n=2n$

$\therefore$ $n\geq 2$ 时，$a_n+a_{n-1}=2(n-1)$，两式相减得：$a_{n+1}-a_{n-1}=2$.

$\therefore$ $a_1,a_3,a_5,\cdots$,构成以 $a_1$,为首项，以 2 为公差的等差数列；

$a_2,a_4,a_6,\cdots$,构成以 $a_2$,为首项，以 2 为公差的等差数列

$\therefore$ $a_{2k-1}=a_1+(k-1)d=2k-2$ $\qquad a_{2k}=a_2+(k-1)d=2k$.

$\therefore$ $a_n=\begin{cases} n-1, n\text{为奇数}, \\ n, n\text{为偶数}. \end{cases}$ 评注：结果要还原成 n 的表达式.

**例 28**.（2005 江西卷）已知数列{$a_n$}的前 n 项和 $S_n$满足

$S_n-S_{n-2}=3(-\frac{1}{2})^{n-1}(n\geq 3)$,且$S_1=1, S_2=-\frac{3}{2}$,求数列{$a_n$}的通项公式.

解：方法一：因为$S_n-S_{n-2}=a_n+a_{n-1}$所以$a_n+a_{n-1}=3\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}(n\geq 3)$,

以下同上例，略

答案 $a_n=\begin{cases}4-3\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}, n\text{为奇数},\\ -4+3\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}, n\text{为偶数}.\end{cases}$

**4. 形如 $a_{n+1}\cdot a_n=f(n)$ 型**

（1）若 $a_{n+1}\cdot a_n=p$（p 为常数），则数列 $\{a_n\}$ 为"等积数列"，它是一个周期数列，周期为 2，其通项分奇数项和偶数项来讨论;

（2）若 f(n) 为 n 的函数（非常数）时，可通过逐差法得 $a_n\cdot a_{n-1}=f(n-1)$，两式相除后，分奇偶项来分求通项.

**例 29**. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3, a_n\cdot a_{n+1}=(\frac{1}{2})^n, (n\in N^*)$, 求此数列的通项公式.

注：同上例类似，略.

**5. 形如 $ps_n=f(a_n)$ 型**

**(1) 若 $f(a_n)$ 是常数，同题型 1.**

**(2) 若 $f(a_n)$ 是一次式同题型 1**

**(3) 若 $f(a_n)$ 是二次式。**

**例 1．(2006 年陕西理 20)** 已知正项数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和 $S_n$ 满足 $a_1, a_3, a_{15}$ 成等比数列，且 10 $S_n=a_n^2+5a_n+6$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n$.

解: ∵ 10 $S_n=a_n^2+5a_n+6$ ①

∴ $10a_1=a_1^2+5a_1+6$, 解得 $a_1=2$ 或 $a_1=3$.

又 10 $S_{n-1}=a_{n-1}^2+5a_{n-1}+6$ ($n\geq 2$), ②

① − ②, 得 $10a_n=(a_n^2-a_{n-1}^2)+5(a_n-a_{n-1})$,

即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-5)=0$.

∵ $a_n+a_{n-1}>0$, ∴ $a_n-a_{n-1}=5(n\geq 2)$.

当 $a_1=3$ 时，$a_3=13, a_{15}=73$. 此时 $a_1, a_3, a_{15}$ 不成等比数列，∴ $a_1\neq 3$.

当 $a_1=2$ 时，$a_3=12, a_{15}=72$. 此时有 $a_3{}^2=a_1a_{15}$. ∴ $a_1=2$.

∴ $a_n=5n-3$.

评注：该题用 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1)\\S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$ 即 $a_n$ 与 $S_n$ 的关系，

$a_n=S_n-S_{n-1}=f(a_n)-f(a_{n-1})$.

消去 $S_n$, 求出 $a_n$, 也可用 $S_n=f(S_n)-f(S_{n-1})$ 消去 $a_n$ 的方法求出 $S_n$ 再求 $a_n$.

**例 2．（2007 年重庆理科 21）**已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ 满足 $S_1>1$，且 $6S_n=(a_n+1)(a_n+2)$，$n\in\mathbf{N}$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（Ⅱ）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n(2^{b_n}-1)=1$，并记 $T_n$ 为 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和，

求证：$3T_n-1>\log_2(a_n+3)$，$n\in\mathbf{N}$.

**解：**（I）解由 $a_1=S_1=\frac{1}{6}(a_1+1)(a_1+2)$，解得 $a_1=1$ 或 $a_1=2$，

由假设 $a_1=S_1>1$，因此 $a_1=2$，

又由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1}{6}(a_{n+1}+1)(a_{n+1}+2)-\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$，

得 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$，即 $a_{n+1}-a_n-3=0$ 或 $a_{n+1}=-a_n$，

因 $a_n>0$，故 $a_{n+1}=-a_n$ 不成立，舍去.

因此 $a_{n+1}-a_n=3$，从而 $\{a_n\}$ 是公差为 3，首项为 2 的等差数列，

故 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=3n-1$.

（II）证法一：由 $a_n(2^{b_n}-1)=1$ 可解得 $b_n=\log_2\left(1+\frac{1}{a_2}\right)=\log_2\frac{3n}{3n-1}$；

从而 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}\right)$.

因此 $3T_n+1-\log_2(a_n+3)=\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}\right)^3\cdot\frac{2}{3n+2}$.

令 $f(n)=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{3n}{3n-1}\right)^3\frac{2}{3n+2}$，

则 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{3n+2}{3n+5}\left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^3=\frac{(3n+3)^2}{(3n+5)(3n+2)^2}$．

因 $(3n+3)^3-(3n+5)(3n+2)^2=9n+7>0$， 故 $f(n+1)>f(n)$．

特别地 $f(n)\geq f(1)=\frac{27}{20}>1$， 从而 $3T_n+1-\log_2(a_n+3)=\log_2 f(n)>0$．

即 $3T_n+1>\log_2(a_n+3)$．

证法二：同证法一求得 $b_n$ 及 $T_n$，

由二项式定理知，当 $c>0$ 时，不等式 $(1+c)^3>1+3c$ 成立．

由此不等式有 $3T_n+1=\log_2 2\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{1}{5}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^3$

$$>\log_2 2\left(1+\frac{3}{2}\right)\left(1+\frac{3}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)$$

$$=\log_2 2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{5}\cdots\frac{3n+2}{3n-1}$$

$$=\log_2(3n+2)$$

$$=\log_2(a_n+3)$$

证法三：同证法一求得 $b_n$ 及 $T_n$．

令 $A_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{3n}{3n-1}$，$B_n=\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{3n+1}{3n}$， $C_n=\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{7}\cdots\frac{3n+2}{3n+1}$．

因 $\frac{3n}{3n-1}>\frac{3n+1}{3n}>\frac{3n+2}{3n+1}$．

因此 $A_n^3>A_nB_nC_n=\frac{3n+2}{2}$．

从而 $3T_n+1=\log_2 2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{3n}{3n-1}\right)^3=\log_2 2A_n^3>\log_2 2A_nB_nC_n$

$$=\log_2(3n+2)=\log_2(a_n+3)．$$

证法四：同证法一求得 $b_n$ 及 $T_n$．

下面用数学归纳法证明： $3T_n+1>\log_2(a_n+3)$．

当 $n=1$ 时， $3T_1+1=\log_2\frac{27}{4}$， $\log_2(a_1+3)=\log_2 5$，

因此$3T_1+1>\log_2(a_1+3)$，结论成立.

假设结论当$n=k$时成立，即$3T_k+1>\log_2(a_k+3)$.

则当$n=k+1$时，

$$3T_{k+1}+1-\log_2(a_{k+1}+3)=3T_k+1+3b_{k+1}-\log_2(a_{k+1}+3)$$

$$>\log_2(a_k+3)-\log_2(a_{k+1}+3)+3b_{k+1}$$

$$=\log_2\frac{(3k+3)^3}{(3k+5)(3k+2)^2};$$

因$(3k+3)^3-(3k+5)(3k+2)^2=9k+7>0$．故$\log_2\dfrac{(3k+3)^3}{(3k+5)(3k+2)^2}>0$.

从而$3T_{k+1}+1>\log_2(a_{k+1}+3)$．这就是说，当$n=k+1$时结论也成立.

综上$3T_n+1>\log_2(a_n+3)$对任何$n\in N_+$成立.

**例 3**．（2008 年全国理科 2）设函数$f(x)=x-x\ln x$．数列$\{a_n\}$满足$0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$.

（Ⅰ）证明：函数$f(x)$在区间$(0,1)$是增函数；

（Ⅱ）证明：$a_n<a_{n+1}<1$；

（Ⅲ）设$b\in(a_1,1)$，整数$k\geqslant\dfrac{a_1-b}{a_1\ln b}$．证明：$a_{k+1}>b$.

解：（Ⅰ）证明：$f(x)=x-x\ln x$，

$f'(x)=-\ln x$,当$x\in(0,1)$时 $f'(x)=-\ln x>0$

故函数$f(x)$在区间(0,1)上是增函数.

（Ⅱ）证明：（用数学归纳法）（i）当 n=1 时，$0<a_1<1$，$a_1\ln a_1<0$，$a_2=f(a_1)=a_1-a_1\ln a_1>a_1$.

由函数$f(x)$在区间$(0,1)$是增函数，且函数$f(x)$在$x=1$处连续，则$f(x)$在区间$(0,1]$是增函数，$a_2=f(a_1)=a_1-a_1\ln a_1<1$，即$a_1<a_2<1$成立；

（ii）假设当$x=k(k\in N^*)$时，$a_k<a_{k+1}<1$成立，即$0<a_1\leqslant a_k<a_{k+1}<1$

那么当$n=k+1$时，由$f(x)$在区间$(0,1]$是增函数，$0<a_1\leqslant a_k<a_{k+1}<1$得：

$f(a_k)<f(a_{k+1})<f(1)$.而$a_{n+1}=f(a_n)$，则$a_{k+1}=f(a_k),a_{k+2}=f(a_{k+1})$，

$a_{k+1}<a_{k+2}<1$，也就是说当$n=k+1$时，$a_n<a_{n+1}<1$也成立；

根据（i）、（ii）可得对任意的正整数$n$，$a_n<a_{n+1}<1$恒成立.

（III）证明：由$f(x)=x-x\ln x$．$a_{n+1}=f(a_n)$可得：

$$a_{k+1}-b=a_k-b-a_k\ln a_k=a_1-b-\sum_{i=1}^{k}a_i\ln a_i.$$

1、若存在某$i\leqslant k$满足$a_i\leqslant b$，则$a_{k+1}-b<a_i-b\geqslant 0$．

2、若对任意$i\leqslant k$都有$a_i>b$，则：

$$a_{k+1}-b=a_k-b-a_k\ln a_k$$

$$=a_1-b-\sum_{i=1}^{k}a_i\ln b=a_1-b-(\sum_{i=1}^{k}a_i)\ln b$$

$$\geq a_1-b-k\ln b>a_1-b-(a_1-b)=0,$$

即$a_1a_{k+1}>b$成立.

**例4**.已知数列$\{a_n\}$中，$a_n>0$且$S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{n}{a_n})$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解:由已知$S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{n}{a_n})$得$S_n=\frac{1}{2}(S_n-S_{n-1}+\frac{n}{S_n-S_{n-1}})$,

化简有$S_n^2-S_{n-1}^2=n$,由类型(1)有$S_n^2=S_1^2+2+3+\cdots+n$,

又$S_1=a_1$得$a_1=1$,所以$S_n^2=\frac{n(n+1)}{2}$,又$a_n>0$，$s_n=\frac{\sqrt{2n(n+1)}}{2}$,

则$a_n=\frac{\sqrt{2n(n+1)}-\sqrt{2n(n-1)}}{2}$.

**6．形如$a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$型**

**例 1．（2008 年湖南理科）**（本小题满分 12 分）

数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=(1+\cos^2\frac{n\pi}{2})a_n+\sin^2\frac{n\pi}{2}, n=1,2,3,\cdots.$

（Ⅰ）求$a_3, a_4$, 并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}, S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n.$ 证明：当$n\geq 6$时, $|S_n-2|<\frac{1}{n}.$

解　（Ⅰ）因为$a_1=1, a_2=2,$ 所以$a_3=(1+\cos^2\frac{\pi}{2})a_1+\sin^2\frac{\pi}{2}=a_1+1=2,$

$a_n=(1+\cos^2\pi)a_2+\sin^2\pi=2a_2=4.$

一般地，当$n=2k-1(k\in\mathrm{N}^*)$时，$a_{2k+1}=[1+\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2}]a_{2k-1}+\sin^2\frac{2k-1}{2}\pi$

$=a_{2k-1}+1$，即$a_{2k+1}-a_{2k-1}=1.$

所以数列$\{a_{2k-1}\}$是首项为 1、公差为 1 的等差数列，因此$a_{2k-1}=k.$

当$n=2k(k\in\mathrm{N}^*)$时，$a_{2k+2}=(1+\cos^2\frac{2k\pi}{2})a_{2k}=2a_{2k}.$

所以数列$\{a_{2k}\}$是首项为 2、公比为 2 的等比数列，因此$a_{2k}=2^k.$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_2=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, n=2k-1(k\in\mathrm{N}^*,\\ 2^{\frac{n}{2}}, n=2k(k\in\mathrm{N}^*.\end{cases}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$b_n=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}=\frac{n}{2^2},$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}, \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}} \qquad ②$$

①−②得，$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^2]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}.$

所以$S_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$

要证明当$n\geq 6$时，$|S_n-2|=\frac{1}{n}$成立，只需证明当$n\geq 6$时，$\frac{n(n+2)}{2^n}<1$成立.

证法一 (1) 当 $n = 6$ 时，$\frac{6\times(6+2)}{2^6}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}<1$成立.

(2) 假设当$n=k(k\geq 6)$时不等式成立，即$\frac{k(k+2)}{2^k}<1.$

则当 $n=k+1$ 时，$\frac{(k+1)(k+3)}{2^{k+1}}=\frac{k(k+2)}{2^k}\times\frac{(k+1)(k+3)}{2k(k+2)}<\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)\cdot 2k}<1.$

由(1)、(2)所述，当 $n\ge 6$ 时，$\frac{n(n+1)}{2^2}<1$，即当 $n\ge 6$ 时，$|S_n-2|<\frac{1}{n}.$

证法二

令 $c_n=\frac{n(n+2)}{2^2}(n\ge 6)$，则 $c_{n+1}-c_n=\frac{(n+1)(n+3)}{2^{n+1}}-\frac{n(n+2)}{2^2}=\frac{3-n^2}{2^{n+1}}<0.$

所以当 $n\ge 6$ 时，$c_{n+1}<c_n$. 因此当 $n\ge 6$ 时，$c_n\le c_6=\frac{6\times 8}{64}=\frac{3}{4}<1$.

于是当 $n\ge 6$ 时，$\frac{n(n+2)}{2^2}<1$. 综上所述，当 $n\ge 6$ 时，$|S_n-2|<\frac{1}{n}$.

**7. 形如 $a_n=a_{n+1}^{\frac{3}{2}}a_{n+2}$ 型**

**例 1.（2008 年重庆理科 22）** 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_n=a_{a+1}^{\frac{3}{2}}a_{a+2}(n\in N^*)$.

（Ⅰ）若 $a_2=\frac{1}{4}$，求 $a_3,a_4$，并猜想 $a_{2008}$ 的值（不需证明）；

（Ⅱ）记 $b_n=a_1a_2\cdots a_n(n\in N^*)$, 若 $b_n\ge 2\sqrt{2}$ 对 $n\ge 2$ 恒成立，求 $a_2$ 的值及数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解：（Ⅰ）因 $a_1=2,a_2=2^{-2}$,故 $a_3=\frac{a_1}{a_2^{-\frac{3}{2}}}=2^4$ ， $a_4=\frac{a_2}{a_3^{-\frac{3}{2}}}=2^{-8}$

由此有 $a_1=2^{(-2)^0},a_2=2^{(-2)^1},a_3=2^{(-2)^2},a_4=2^{(-2)^3}$，

故猜想 $|a_n|$ 的通项为 $a_n=2^{(-2)^{n-1}}(n\in N^*)$. ∴ $a_{2008}=2^{(-2)^{2008-1}}=2^{(-2)^{2007}}$.

（Ⅱ）令 $x_n=\log_2 a_n, S_n$ 表示 $x_n$ 的前 $n$ 项和，则 $b_n=2^{S_n}$.

由题设知 $x_1=1$ 且 $x_n=\frac{3}{2}x_{n+1}+x_{n+2}(n\in \mathrm{N}^*)$ ， ①

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n\ge\frac{3}{2}(n\ge 2) \quad ②$$

因②式对 $n=2$ 成立，有 $\frac{3}{2}\le x_1+x_2$, 又 $x_1=1$ 得 $x_2\ge\frac{1}{2}$ ③

下面用反证法证明：

由①得 $x_{n+2}+2x_{n+1}=(x_{n+2}+\frac{3}{2}x_{n+1})+\frac{1}{2}(x_{n+1}+2x_n)$.

因此数列$\{x_{n+1}+2x_n\}$是首项为$x_2+2$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列. 故

$$x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n=(x_2-\frac{1}{2})\frac{1}{2^{n-1}}(n\in \mathrm{N}^*).\qquad ④$$

又由①知 $x_{n+2}-\frac{1}{2}x_{x+1}=(x_n-\frac{3}{2}x_{n+1})-\frac{1}{2}x_{n+1}=-2(x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n)$,

因此是$\left|x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n\right|$是首项为$x_2-\frac{1}{2}$，公比为−2 的等比数列,所以

$$x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n=(x_2-\frac{1}{2})(-2)^{n-1}(n\in \mathrm{N}^*).\qquad ⑤$$

由④−⑤得 $\frac{5}{2}S_n=(x_2+2)\frac{1}{2^{n-1}}-(x_2-\frac{1}{2})(-2)^{n-1}(n\in \mathrm{N}^*).$ ⑥

对$n$求和得$\frac{5}{2}x_n=(x_2+2)(2-\frac{1}{2^{n-1}})-(x_2-\frac{1}{2})\frac{1-(-2)^2}{3}(n\in \mathrm{N}^*).$ ⑦

由题设知$S_{2k+1}\le\frac{3}{2}$,且由反证假设有$x_2>\frac{1}{2}$

$(x_2+2)(2-\frac{1}{2^{2k}})-(x_2-\frac{1}{2})\frac{2^{2k+1}+1}{3}\le\frac{15}{4}(k\in N^*).$

从而$(x_2-\frac{1}{2})\cdot\frac{2^{2k+1}+1}{3}\ge(x_2+2)(2-\frac{1}{2^{2k}})-\frac{15}{4}\ge 2x_2+\frac{1}{4}(k\in N^*).$

即不等式$2^{2k+1}<\frac{6x_2+\frac{3}{4}}{x_2-\frac{1}{2}}-1$，对$k\in N^*$恒成立. 但这是不可能的，矛盾.

因此$x_2\le\frac{1}{2}$,结合③式知$x_2=\frac{1}{2}$,

因此$a_2=2^{-2}=\sqrt{2}$ 将$x_2=\frac{1}{2}$代入⑦式得$S_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$（$n\in N^*$）,

所以$b_n=2^{S_n}=2^{2-\frac{1}{2^{n-1}}}$（$n\in N^*$）

**8．形如$f(n)S_{n+1}+g(n)S_n=0$型**

**例 1．（2008 年天津理科 22）**在数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中，$a_1=1,b_1=4$数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$满足$nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$,$2a_{n+1}$为$b_n$与$b_{n+1}$的等比中项，$n\in N^*$.

（Ⅰ）求$a_2,b_2$的值；

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅲ）设$T_n=(-1)^{a_1}b_1+(-1)^{a_2}b_2+\cdots+(-1)^{a_n}b_n, n\in N^*$.证明$|T_n|<2n^2, n\geq 3$.

本小题主要考查等差数列的概念、通项公式及前$n$项和公式、等比数列的概念、等比中项、不等式证明、数学归纳等基础知识，考查运算能力和推理论证能力及分类讨论的思想方法．满分 14 分

解：（Ⅰ）由题设有$a_1+a_2-4a_1=0$，$a_1=1$，解得$a_2=3$．由题设又有$4a_2^2=b_2b_1$，$b_1=4$，解得$b_2=9$．

（Ⅱ）解法一：由题设$nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$，$a_1=1$，$b_1=4$，及$a_2=3$，$b_2=9$，进一步可得$a_3=6$，$b_3=16$，$a_4=10$，$b_4=25$，

猜想$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$b_n=(n+1)^2$，$n\in N^*$．

先证$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$n\in N^*$．

当$n=1$时，$a_1=\dfrac{1\times(1+1)}{2}$，等式成立．当$n\geq 2$时用数学归纳法证明如下：

（1 当$n=2$时，$a_2=\dfrac{2\times(2+1)}{2}$，等式成立．

（2）假设$n=k$时等式成立，即$a_k=\dfrac{k(k+1)}{2}$，$k\geq 2$．

由题设，　$kS_{k+1}=(k+3)S_k$　①

$(k-1)S_k=(k+2)S_{k-1}$②

① 的两边分别减去②的两边，整理得$ka_{k+1}=(k+2)a_k$，从而

$a_{k+1}=\dfrac{k+2}{k}a_k=\dfrac{k+2}{k}\cdot\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$．

这就是说，当$n=k+1$时等式也成立．根据（1）和（2）可知，等式$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$对任何的$n\geq 2$成立．

综上所述，等式$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$对任何的$n\in N^*$都成立$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

再用数学归纳法证明$b_n=(n+1)^2$，$n\in N^*$．

（1）当$n=1$时，$b_1=(1+1)^2$，等式成立．

（2）假设当$n=k$时等式成立，即$b_k=(k+1)^2$，那么

$b_{k+1}=\dfrac{4a_{k+1}{}^2}{b_k}=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{(k+1)^2}=[(k+1)+1]^2$.

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立．根据（1）和（2）可知，等式

$b_n=(n+1)^2$

对任何的 $n\in N^*$ 都成立．

解法二：由题设 $nS_{n+1}=(n+3)S_n$　○

$$(n-1)S_n=(n+2)S_{n-1}\ ○$$

① 的两边分别减去②的两边，整理得 $na_{n+1}=(n+2)a_n$， $n\geq 2$．所以

$2a_3=4a_2$，　$3a_4=5a_3$，　……　$(n-1)a_n=(n+1)a_{n+1}$，　$n\geq 3$．

将以上各式左右两端分别相乘，得 $(n-1)!a_n=\dfrac{(n+1)!}{6}a_2$，

由（Ⅰ）并化简得 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{6}a_2=\dfrac{n(n+1)}{2}$， $n\geq 3$．

止式对 $n=1,2$ 也成立．

由题设有 $b_{n+1}b_n=4a_{n+1}{}^2$，所以 $b_{n+1}b_n=(n+2)^2(n+1)^2$，

即 $\dfrac{b_n}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{b_{n+1}}{(n+2)^2}=1$， $n\in N^*$．

令 $x_n=\dfrac{b_n}{(n+1)^2}$，则 $x_nx_{n+1}=1$，即 $x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n}$．

由 $x_1=1$ 得 $x_n=1$， $n\geq 1$．所以 $\dfrac{b_n}{(n+1)^2}=1$，即 $b_n=(n+1)^2$， $n\geq 1$．

解法三：由题设有 $nS_{n+1}=(n+3)S_n$， $n\in N^*$，

所以 $S_2=4S_1$， $2S_3=5S_2$，……$(n-1)S_n=(n+2)S_{n-1}$， $n\geq 2$．

将以上各式左右两端分别相乘，得 $1\times 2\times\cdots\times(n-1)S_n=4\times 5\times\cdots\times(n+2)S_1$，化简得

$S_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2\times 3}a_1=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$， $n\geq 3$．

由（Ⅰ），上式对 $n=1,2$ 也成立．所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$， $n\geq 2$．

上式对$n=1$时也成立.

以下同解法二，可得$b_n=(n+1)^2$，$n\geq 1$.

（III）证明：

$$T_n=(-1)^{a_1}b_1+(-1)^{a_2}b_2+\cdots+(-1)^{a_n}b_n=-2^2-3^2+\cdots+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^2.$$

当$n=4k$，$k\in N^*$时，

$$T_n=-2^2-3^2+4^2+5^2-\cdots-(4k-2)^2-(4k-1)^2+(4k)^2+(4k+1)^2.$$

注意到$-(4k-2)^2-(4k-1)^2+(4k)^2+(4k+1)^2=32k-4$，

$$\text{故}T_n=32\times(1+2+\cdots+k)-4=32\times\frac{k(k+1)}{2}-4$$

$$=4k(4k+4)-4=(4k)^2+3\times 4k=n^2+n-4.$$

当$n=4k-1$，$k\in N^*$时，

$$T_n=(4k)^2+4\times 4k-(4k+1)^2-4=(n+1)^2+4(n+1)-(n+2)^2-4=2n+1$$

当$n=4k-2$，$k\in N^*$时，

$$T_n=(4k)^2+4\times 4k-(4k+1)^2-(4k)^2-4=4(n+2)-(n+3)^2-4=-n^2-2n+4.$$

当$n=4k-3$，$k\in N^*$时，

$$T_n=4\times 4k-(4k+1)^2+(4k-1)^2=4(n+3)-(n+4)^2+(n+2)^2-4=-4.$$

$$\text{所以}T_n=\begin{cases}-4, & n=4k-3,k\in N^*\\ -n^2-2n+4, & n=4k-2,k\in N^*\\ 2n+1, & n=4k-1,k\in N^*\\ n^2+n-4, & n=4k,k\in N^*\end{cases}.$$

$$\text{从而}n\geq 3\text{时，有}\frac{|T_n|}{n^2}=\begin{cases}-\frac{4}{n^2}<0, & n=5,9,13,\cdots\\ -1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}<2, & n=6,10,14,\cdots\\ \frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}<2, & n=3,7,11,\cdots\\ 1+\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}<2, & n=4,8,12,\cdots\end{cases}$$

总之，当$n\geq 3$时有$\frac{|T_n|}{n^2}<2$，即$|T_n|<2n^2$.