高中高考数学易错易混易忘题

分类汇总及解析（2）

【易错点9】应用重要不等式确定最值时，忽视应用的前提条件特别是易忘判断不等式取得等号时的变量值是否在定义域限制范围之内。

例9、 已知：a>0 ， b>0 ， a+b=1,求$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$的最小值。

错解 ：$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4\geqslant 2ab+\frac{2}{ab}+4\geqslant 4\sqrt{ab\bullet\frac{1}{ab}}+4=8$∴$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$的最小值是8

【易错点分析】 上面的解答中，两次用到了基本不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$，第一次等号成立的条件是$a=b=\frac{1}{2}$，第二次等号成立的条件$ab=\frac{1}{ab}$，显然，这两个条件是不能同时成立的。因此，8不是最小值。

解析：原式$=a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4=(a^2+b^2)+(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})+4=[(a+b)^2-2ab]+[(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2-\frac{2}{ab}]+4=(1-2ab)(1+\frac{1}{a^2b^2})+4$ 由$ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}$ 得：$1-2ab\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，且$\frac{1}{a^2b^2}\geqslant 16$，$1+\frac{1}{a^2b^2}\geqslant 17$∴原式$\geqslant\frac{1}{2}\times 17+4=\frac{25}{2}$ （当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立）∴$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2$的最小值是$\frac{25}{2}$。

【知识归类点拔】在应用重要不等式求解最值时，要注意它的三个前提条件缺一不可即“一正、二定、三相等”，在解题中容易忽略验证取最值时的使等号成立的变量的值是否在其定义域限制范围内。

【练9】（97全国卷文22理22）甲、乙两地相距s km ， 汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过c km/h ,已知汽车每小时的运输成本（以元为单位）由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v（km/h）的平方成正比，比例系数为b;固定部分为a元。

（1） 把全程运输成本y（元）表示为速度v（km/h）的函数，并指出这个函数的定义域；

（2） 为了使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶？

答案为:（1） $y=\frac{s}{v}(bv^2+a)(0<v\leqslant c)$ （2）使全程运输成本最小，当$\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$时，行驶速度$v=\sqrt{\frac{a}{b}}$；当$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$时，行驶速度v=c。

【易错点10】在涉及指对型函数的单调性有关问题时，没有根据性质进行分类讨论的意识和易忽略对数函数的真数的限制条件。

例10、是否存在实数a使函数$f(x)=\log_a^{ax^2-x}$在$[2,4]$上是增函数？若存在求出a的值，若不存在，说明理由。

【易错点分析】本题主要考查对数函数的单调性及复合函数的单调性判断方法，在解题过程中易忽略对数函数的真数大于零这个限制条件而导致a的范围扩大。

解析：函数 $f(x)$ 是由 $\phi(x)=ax^2-x$ 和 $y=\log_a^{\phi(x)}$ 复合而成的，根据复合函数的单调性的判断方法（1）当a>1时，若使 $f(x)=\log_a^{ax^2-x}$ 在 $\left[2,4\right]$ 上是增函数，则 $\phi(x)=ax^2-x$ 在 $\left[2,4\right]$ 上是增函数且大于零。故有 $\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\le 2\\ \phi(2)=4a-2>0\end{cases}$ 解得a>1。（2）当a<1时若使 $f(x)=\log_a^{ax^2-x}$ 在 $\left[2,4\right]$ 上是增函数，则 $\phi(x)=ax^2-x$ 在 $\left[2,4\right]$ 上是减函数且大于零。$\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\ge 4\\ \phi(4)=16a-4>0\end{cases}$ 不等式组无解。综上所述存在实数a>1使得函数 $f(x)=\log_a^{ax^2-x}$ 在 $\left[2,4\right]$ 上是增函数

【知识归类点拨】要熟练掌握常用初等函数的单调性如：一次函数的单调性取决于一次项系数的符号，二次函数的单调性决定于二次项系数的符号及对称轴的位置，指数函数、对数函数的单调性决定于其底数的范围（大于1还是小于1），特别在解决涉及指、对复合函数的单调性问题时要树立分类讨论的数学思想（对数型函数还要注意定义域的限制）。

【练10】（1）（黄岗三月分统考变式题）设 $a>0$，且 $a\ne 1$ 试求函数 $y=\log_a 4+3x-x^2$ 的的单调区间。

答案：当 $0<a<1$，函数在 $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right]$ 上单调递减在 $\left[\dfrac{3}{2},4\right)$ 上单调递增当 $a>1$ 函数在 $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right]$ 上单调递增在 $\left[\dfrac{3}{2},4\right)$ 上单调递减。

（2）（2005高考天津）若函数 $f(x)=\log_a\left(x^3-ax\right)(a>0,a\ne 1)$ 在区间 $(-\dfrac{1}{2},0)$ 内单调递增，则 a 的取值范围是（）A、$[\dfrac{1}{4},1)$　　B、$[\dfrac{3}{4},1)$　　C、$(\dfrac{9}{4},+\infty)$　　D、$(1,\dfrac{9}{4})$

答案：B.（记 $g(x)=x^3-ax$，则 $g'(x)=3x^2-a$ 当 $a>1$ 时，要使得 $f(x)$ 是增函数，则需有 $g'(x)>0$ 恒成立，所以 $a<3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$. 矛盾. 排除C、D当 $0<a<1$ 时，要使 $f(x)$ 是函数，则需有 $g'(x)<0$ 恒成立，所以 $a>3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$. 排除A）

【易错点11】 用换元法解题时，易忽略换元前后的等价性.

例11、已知 $\sin x+\sin y=\dfrac{1}{3}$ 求 $\sin y-\cos^2 x$ 的最大值

【易错点分析】此题学生都能通过条件 $\sin x+\sin y=\dfrac{1}{3}$ 将问题转化为关于 $\sin x$ 的函数，进而利用换元的思想令 $t=\sin x$ 将问题变为关于t的二次函数最值求解。但极易忽略换元前后变量的等价性而造成错解，

解析：由已知条件有 $\sin y=\frac{1}{3}-\sin x$ 且 $\sin y=\frac{1}{3}-\sin x\in[-1,1]$（结合 $\sin x\in[-1,1]$）得 $-\frac{2}{3}\le\sin x\le 1$，而 $\sin y-\cos^2 x=\frac{1}{3}-\sin x-\cos^2 x=\sin^2 x-\sin x-\frac{2}{3}$ 令 $t=\sin x\left(-\frac{2}{3}\le t\le 1\right)$ 则原式 $=t^2-t-\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\le t\le 1\right)$ 根据二次函数配方得：当 $t=-\frac{2}{3}$ 即 $\sin x=-\frac{2}{3}$ 时，原式取得最大值 $\frac{4}{9}$。

【知识点归类点拨】"知识"是基础，"方法"是手段，"思想"是深化，提高数学素质的核心就是提高学生对数学思想方法的认识和运用，数学素质的综合体现就是"能力"，解数学题时，把某个式子看成一个整体，用一个变量去代替它，从而使问题得到简化，这叫换元法。换元的实质是转化，关键是构造元和设元，理论依据是等量代换，目的是变换研究对象，将问题移至新对象的知识背景中去研究，从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化，变得容易处理。换元法又称辅助元素法、变量代换法。通过引进新的变量，可以把分散的条件联系起来，隐含的条件显露出来，或者把条件与结论联系起来。或者变为熟悉的形式，把复杂的计算和推证简化。

【练 11】（1）（高考变式题）设 a>0，000 求 $f(x)=2a(\sin x+\cos x)-\sin x\cdot\cos x-2a^2$ 的最大值和最小值。

答案：f(x)的最小值为 $-2a^2-2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$，最大值为 $\begin{cases}\frac{1}{2}\left(0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ -2a^2+2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}\left(a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$

（2）不等式 $\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$ 的解集是(4, b)，则 a=________，b=_______。

答案：$a=\frac{1}{8},b=36$（提示令换元 $\sqrt{x}=t$ 原不等式变为关于 t 的一元二次不等式的解集为 $\left(2,\sqrt{b}\right)$）

【易错点 12】已知 S_n 求 a_n 时，易忽略 n＝1 的情况.

例 12、（2005 高考北京卷）数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 s_n 且 $a_1=1,a_{n+1}=\frac{1}{3}s_n$。（1）求 a_2,a_3,a_4 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【易错点分析】此题在应用 s_n 与 a_n 的关系时误认为 $a_n=s_n-s_{n-1}$ 对于任意 n 值都成立，忽略了对 n=1 的情况的验证。易得出数列 $\{a_n\}$ 为等比数列的错误结论。

解析：易求得 $a_2=\frac{1}{3},a_3=\frac{4}{9},a_4=\frac{16}{27}$。由 $a_1=1,a_{n+1}=\frac{1}{3}s_n$ 得 $a_n=\frac{1}{3}s_{n-1}(n\ge 2)$ 故 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}s_n-\frac{1}{3}s_{n-1}=\frac{1}{3}a_n(n\ge 2)$ 得 $a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n(n\ge 2)$ 又 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{3}$ 故该数列从

第二项开始为等比数列故 $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} & (n\geq 2)\end{cases}$。

【知识点归类点拔】对于数列 a_n 与 s_n 之间有如下关系：$a_n=\begin{cases}s_1 & (n=1)\\ s_n-s_{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$ 利用两者之间的关系可以已知 s_n 求 a_n。但注意只有在当 a_1 适合 $a_n=s_n-s_{n-1}\ (n\geq 2)$ 时两者才可以合并否则要写分段函数的形式。

【练 12】（2004 全国理）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n=a_1+2a_2+3a_3+\ldots+(n-1)a_{n-1}\ (n\geq 2)$ 则数列 $\{a_n\}$ 的通项为______________。

答案：（将条件右端视为数列 $\{na_n\}$ 的前 n-1 项和利用公式法解答即可）$a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \frac{n!}{2} & (n\geq 2)\end{cases}$

【易错点 13】利用函数知识求解数列的最大项及前 n 项和最大值时易忽略其定义域限制是正整数集或其子集（从 1 开始）

例 13、等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1>0$，前 n 项和 s_n，当 $l\neq m$ 时，$s_m=s_l$。问 n 为何值时 s_n 最大?

【易错点分析】等差数列的前 n 项和是关于 n 的二次函数，可将问题转化为求解关于 n 的二次函数的最大值但易忘记此二次函数的定义域为正整数集这个限制条件。

解析：由题意知 $s_n=f(n)=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ 此函数是以 n 为变量的二次函数，因为 $a_1>0$，当 $l\neq m$ 时，$s_m=s_l$ 故 $d<0$ 即此二次函数开口向下，故由 $f(l)=f(m)$ 得当 $x=\frac{l+m}{2}$ 时 $f(x)$ 取得最大值，但由于 $n\in N^+$，故若 $l+m$ 为偶数，当 $n=\frac{l+m}{2}$ 时，s_n 最大。当 $l+m$ 为奇数时，当 $n=\frac{l+m\pm 1}{2}$ 时 s_n 最大。

【知识点归类点拔】数列的通项公式及前 n 项和公式都可视为定义域为正整数集或其子集（从 1 开始）上的函数，因此在解题过程中要树立函数思想及观点应用函数知识解决问题。特别的等差数列的前 n 项和公式是关于 n 的二次函数且没有常数项，反之满足形如 $s_n=an^2+bn$ 所对应的数列也必然是等差数列的前 n 项和。此时由 $\frac{s_n}{n}=an+b$ 知数列中的点 $\left(n,\frac{s_n}{n}\right)$ 是同一直线上，这也是一个很重要的结论。此外形如前 n 项和 $s_n=ca^n-c$ 所对应的数列必为一等比数列的前 n 项和。

【练 13】（2001 全国高考题）设$\{a_n\}$是等差数列，s_n是前 n 项和，且$s_5 < s_6$，$s_6 = s_7 > s_8$，则下列结论错误的是（）A、$d < 0$ B、$a_7 = 0$ C、$s_9 > s_5$ D、s_6和s_7均为s_n的最大值。

答案：C（提示利用二次函数的知识得等差数列前 n 项和关于 n 的二次函数的对称轴再结合单调性解答）

【易错点 14】解答数列问题时没有结合等差、等比数列的性质解答使解题思维受阻或解答过程繁琐。

例 14、已知关于的方程$x^2 - 3x + a = 0$和$x^2 - 3x + b = 0$的四个根组成首项为$\frac{3}{4}$的等差数列，求$a + b$的值。

【思维分析】注意到两方程的两根之和相等这个隐含条件，结合等差数列的性质明确等差数列中的项是如何排列的。

解析：不妨设$\frac{3}{4}$是方程$x^2 - 3x + a = 0$的根，由于两方程的两根之和相等故由等差数列的性质知方程$x^2 - 3x + a = 0$的另一根是此等差数列的第四项，而方程$x^2 - 3x + b = 0$的两根是等差数列的中间两项，根据等差数列知识易知此等差数列为：$\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4}$故$a = \frac{27}{16}, b = \frac{35}{16}$从而$a + b = \frac{31}{8}$。

【知识点归类点拔】等差数列和等比数列的性质是数列知识的一个重要方面，有解题中充分运用数列的性质往往起到事半功倍的效果。例如对于等差数列$\{a_n\}$，若$n + m = p + q$，则$a_n + a_m = a_p + a_q$；对于等比数列$\{a_n\}$，若$n + m = u + v$，则$a_n \cdot a_m = a_u \cdot a_v$；若数列$\{a_n\}$是等比数列，$S_n$是其前 n 项的和，$k \in N^*$，那么$S_k$，$S_{2k} - S_k$，$S_{3k} - S_{2k}$成等比数列；若数列$\{a_n\}$是等差数列，$S_n$是其前 n 项的和，$k \in N^*$，那么$S_k$，$S_{2k} - S_k$，$S_{3k} - S_{2k}$成等差数列等性质要熟练和灵活应用。

【练 14】（2003 全国理天津理）已知方程$x^2 - 2x + m = 0$和$x^2 - 2x + n = 0$的四个根组成一个首项为$\frac{1}{4}$的等差数列，则$|m - n|$=（）　A、1 B、$\frac{3}{4}$ C、$\frac{1}{2}$ D、$\frac{3}{8}$

答案：C

【易错点 15】用等比数列求和公式求和时，易忽略公比 q＝1 的情况

例 15、数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，数列$\{a_n \cdot a_{n+1}\}$是公比为q（$q > 0$）的等比数列。

（I）求使$a_n a_{n+1} + a_{n+1} a_{n+2} > a_{n+2} a_{n+3}$成立的$q$的取值范围；（II）求数列$\{a_n\}$的前$2n$项的和$S_{2n}$.

【易错点分析】对于等比数列的前 n 项和易忽略公比 q=1 的特殊情况，造成概念性错误。再者学生没有从定义出发研究条件数列$\{a_n \cdot a_{n+1}\}$是公比为q（$q > 0$）的等比数列得到数列奇数项和偶数项成等比数列而找不到解题突破口。使思维受阻。

解：（I）∵数列$\{a_n \cdot a_{n+1}\}$是公比为q的等比数列，∴$a_{n+1}a_{n+2}=a_na_{n+1}q$，

$a_{n+2}a_{n+3}=a_na_{n+1}q^2$，由$a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}>a_{n+2}a_{n+3}$得

$a_na_{n+1}+a_na_{n+1}q>a_na_{n+1}q^2 \Rightarrow 1+q>q^2$，即$q^2-q-1<0$（$q>0$），解得

$0<q<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

（II）由数列$\{a_n \cdot a_{n+1}\}$是公比为q的等比数列，得$\dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=q \Rightarrow \dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q$，这表明数列$\{a_n\}$的所有奇数项成等比数列，所有偶数项成等比数列，且公比都是q，又$a_1=1$，$a_2=2$，∴当$q\neq 1$时，$S_{2n}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})$

$=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}+\dfrac{a_2(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{3(1-q^n)}{1-q}$，当$q=1$时，$S_{2n}$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n})$

$=(1+1+1+\cdots+1)+(2+2+2+\cdots+2)=3n$.

【知识点归类点拨】本题中拆成的两个数列都是等比数列，其中$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q$是解题的关键，这种给出数列的形式值得关注。另外，不要以为奇数项、偶数项都成等比数列，且公比相等，就是整个数列成等比数列解题时要慎重，写出数列的前几项进行观察就得出正确结论．对等比数列的求和一定要注意其公比为1这种特殊情况。高考往往就是在这里人为的设计陷阱使考生产生对现而不全的错误。

【练15】（2005高考全国卷一第一问）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和$s_n>0$（1）求q的取值范围。

答案：$(-1,0)\cup(0,+\infty)$