

嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略

摘要

本文研究嫦娥三号软着陆轨道设计与最优控制策略，将数学模型和算法融合于航天科技研究问题。采用广度遍历算法，广义乘子法，拟牛顿法等多种经典模型分析方法，应用 MATLAB, LINGO, 1STOPT 等建模软件。并对所设计的着陆轨道和最有控制策略，进行误差分析和敏感度分析，以预测未来深入研究方向。

对于问题一，首先利用物理学中的机械能守恒定律和开普勒第二定律（面积定律），以及嫦娥三号在椭圆轨道上的运动规律，求出了远月点和近月点的速度大小和方向。远月点 $v_1 = 1.613\text{km/s}$; 近月点 $v_2 = 1.692\text{km/s}$; 方向均为运动轨道的切线方向。利用 15km 到 3km 主减速阶段的运动过程和着陆点的位置反推近月点的位置，然后根据月球经纬度的划分和换算，得远月点的位置。近月点的位置：距离着陆点 425km ，经纬度范围为 $[1.26E, 40.28W], [29.48N, 58.76N]$ 的圆周正上方 15km 处；远月点的位置：距离 $[170.49E, 44.12S]$ 425km ，经纬度范围为 $[178.74W, 139.72E], [29.48S, 58.76S]$ 的圆周正上方 100km 处。

对于问题二，着陆准备阶段，为确定着陆准备轨道，先确定远月点的位置，根据问题一中计算得到的远月点的位置，即经纬度和距离，采用广度遍历算法，对远月点所有可能的位置进行遍历算法求解。得到确定的远月点的唯一位置。远月点的位置确定，则近月点的位置确定，则着陆准备轨道唯一确定。主减速阶段，建立月心软着陆极坐标系，并根据主减速阶段的初末位置和条件，建立以消耗燃料最少为目标的软着陆运动学方程组。为减小量纲带来的误差，进行归一化；为固定终端约束，将运动学方程转化为终端积分变量固定型最优控制；为进行快速优化，将其转化为有终端约束的非线性规划问题；利用广义乘子法，将其转化为无终端约束的非线性规划问题，用拟牛顿法进行最终求解。利用 1STOPT 计算求解， $t_f = 493.038\text{s}$ ； $v_f = 45.237\text{m/s}$ ；

$\omega_f = 0.000329\text{rad/s}$ ； $J = 1079.082\text{kg}$ ；并对结果进行优化分析。快速调整阶段相比主减速阶段，增加了目标函数时间最短和姿态调整发动机的反馈调整角机制，仿真结果为 $t_f = 19\text{s}$ ； $J = 60\text{kg}$ 。粗避障阶段，根据数字高程图，利用安全半径螺旋搜索算法寻找着陆安全点并确定轨道。精避障阶段，根据三维数字高程图，中心螺旋式安全着陆区搜索方法寻找着陆安全点并确定轨道。缓慢下降阶段，相对于主减速阶段，增加了对加速度的控制，优化结果，此阶段消耗燃料极少。

对于问题三，误差分析采用绝对误差分析和相对误差分析两种方法。经分析通过对 3 种不同方法所得到的速度、角速度、推动力大小及方向等进行绝对误差分析及相对误差分析得到，上文建立的模型与理论最优解非常相近。用模糊方法进行敏感性分析，分别采用模糊分析中的因素变动概率程度估计和因素敏感性综合决策两种方法，经分析知，嫦娥三号的着陆轨道敏感性较高。

关键字：软着陆轨道；最优控制策略；广义乘子法；仿真；1STOPT

1. 问题重述

嫦娥三号于 2013 年 12 月 2 日 1 时 30 分成功发射，12 月 6 日抵达月球轨道。嫦娥三号在着陆准备轨道上的运行质量为 2.4t，其安装在下部的主减速发动机能够产生 1500N 到 7500N 的可调节推力，其比冲（即单位质量的推进剂产生的推力）为 2940m/s，可以满足调整速度的控制要求。在四周安装有姿态调整发动机，在给定主减速发动机的推力方向后，能够自动通过多个发动机的脉冲组合实现各种姿态的调整控制。嫦娥三号的预定着陆点为 19.51W, 44.12N，海拔为-2641m（见附件 1）。

嫦娥三号在高速飞行的情况下，要保证准确地在月球预定区域内实现软着陆，关键问题是着陆轨道与控制策略的设计。其着陆轨道设计的基本要求：着陆准备轨道为近月点 15km，远月点 100km 的椭圆形轨道；着陆轨道为从近月点至着陆点，其软着陆过程共分为 6 个阶段（见附件 2），要求满足每个阶段在关键点所处的状态；尽量减少软着陆过程的燃料消耗。

根据上述的基本要求，请你们建立数学模型解决下面的问题：

- (1) 确定着陆准备轨道近月点和远月点的位置，以及嫦娥三号相应速度的大小与方向。
- (2) 确定嫦娥三号的着陆轨道和在 6 个阶段的最优控制策略。
- (3) 对于你们设计的着陆轨道和控制策略做相应的误差分析和敏感性分析。

2. 问题分析

2.1 近月点远月点的位置及速度分析

此问题要求嫦娥三号着陆准备轨道的近月点和远月点的位置，嫦娥三号在近月点，远月点的速度大小及方向。因为近月点在月心坐标系的位置和软着陆轨道形态共同决定了着陆点的位置，因此可根据预定着陆点的位置和软着陆过程计算近月点的位置，远月点的位置近月点与月心连线的延长线上距月球表面 100km 处。嫦娥三号在近月点，远月点的速度可根据卫星在宇宙中的运动规律求得。

2.2 着陆轨道和在 6 个阶段的最优控制策略分析

此问题要求确定嫦娥三号的着陆轨道和在 6 个阶段的最优控制策略。嫦娥三号的着陆轨道包括着陆准备轨道和软着陆轨道，6 个阶段为着陆准备轨道，主减速段，快速调整段，粗避障段，精避障段，缓速下降阶段，下面将分别考虑 6 个阶段的最优控制策略，在每个阶段里确定每一阶段的着陆轨道，将 6 段着陆轨道连接起来即是嫦娥三号的着陆轨道。

2.2.1 考虑嫦娥三号的着陆准备轨道，根据嫦娥三号的飞行状态，由 100km 环月圆轨道进入着陆准备轨道，关键在于远月点的选择，用遍历法确定远月点即是确定了近月点，着陆准备轨道就可确定。

2.2.2 在主减速阶段，根据参考文献得到的着陆器的运动学方程，得到使消耗能量最小同时也是时间最短的优化条件。根据最大值原理，在推力方向角单调的情况下，将着陆器的软着陆方程积分变换积分将变量不确定型最优控制问题转化为终端积分变量固定型最优控制问题，再转化为非线性规划问题求解。需要用到数值积分时，采用计算

量小、精度高的四阶 Admas 预测—校正方法。为保证优化精度，将软着陆终端积分变量固定型最优控制问题，转化为非线性规划问题时，采用精度较高的直接离散化方法。最后采用广义乘子法快速求解。用 matlab 进行计算仿真最终得到优化后的结果。

2.2.3 快速调整阶段在上一步求解得到的结果基础上，根据 Pontryagin 最大值原理，在此阶段的处理中，仍取 $F_{thrust} = 7500N$ ，建立快速调整阶段数学模型。运用 matlab 计算仿真求解。

2.2.4 粗避障主要目的是在较大着陆范围内剔除明显危及着陆安全的大尺度障碍，为精避障提供较好的安全点选取区域，考虑到探测器运动速度较大，要求成像快、计算快。还要综合评估推进剂消耗来选择最优位置。根据月球岩石和坑的特征，来确定安全区域，设计粗障碍识别和安全着陆区域的选取算法。

2.2.5 精避障主要目的是在粗避障选取的较安全区域内进行精确的障碍检测，无比识别并剔除危及安全的小尺度障碍，确保了落地安全。在悬停状态下，三维成像传感器对视场内的着陆区域进行三维成像，获取着陆器相对月面着陆区域的高分辨率斜距数据信息。通过设计的精障碍识别和安全着陆区域选取散发处理这些数据，实现对月面地形障碍识别和安全着陆选取。设计精避障安全区域的选取算法。若在视场内难以找到完全满足要求的安全着陆区域，则根据坡度和安全半径的加权判断选取最优的区域作为安全着陆区，确定安全着陆点。

2.2.6 此阶段较为简单，在保持水平方向为 0 的情况下，竖直方向提供的加速度只需稍大于月球的重力加速度，保证在距离地面 4 米时速度基本为 0。

2.3 着陆轨道和控制策略相应误差分析和敏感性分析

此题要求对所设计的着陆轨道和控制策略做相应的误差分析和敏感性分析。即考虑到需要利用上一问在建立的最优控制策略下设计的着陆轨道在不同阶段下的速度、角速度、能量、推动力大小及方向角与其他优化方案（如较为典型的Pontryagin最大值原理、基于SQP的月球软着陆优化方法等）下的结果相比较。误差分析中，不同方法下数据的绝对误差与相对误差可以知晓所建模型实用性的好坏。敏感性分析中，运用模糊方法可以较为直观的知晓某种指标的改变是否会对其他指标造成影响以及影响有多大，方便对模型进一步的改进。

3. 模型假设

1. 月球的扁率为 $\frac{1}{963.7256}$ ，极小，因此在处理问题中将月球看作球体。
2. 为了简化问题，采用常推力假设。

4. 符号说明

G 为万有引力常量，为定值， $G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$ ；

M 为月球的质量；

m_0 为嫦娥三号在着陆准备轨道上的飞行质量；

v_1 为嫦娥三号在远月点的速度；

v_2 为嫦娥三号在近月点的速度；

R_1 为月心到远月点的距离；

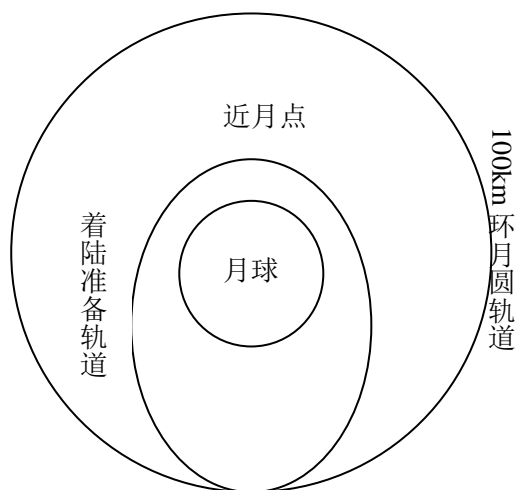
R_2 为月心到近月点的距离；

E_1 为嫦娥三号在远月点的机械能；
 E_2 为嫦娥三号在近月点的机械能；
 ρ 为准备着陆轨道的曲率半径；
 F_{thrust} 主减速发动机的推动力；
 $a_{引}$ 月球的引力产生的加速度；
 a_{thrust} 为推动力 F_{thrust} 产生的合加速度；
 a_y 为推动力 F_{thrust} 产生的竖直加速度；
 a_x 为推动力 F_{thrust} 产生的水平加速度；
 s 为主减速阶段总航程；
 h 为主减速阶段竖直方向航程；
 x 为主减速阶段水平方向航程；
 r 为着陆器距月心矢径；
 v 为着陆器在 r 方向上的速度；
 θ 为着陆器环绕月球表面的航程角；
 ω 为航程角的角速度；
 m 为着陆器质量；
 μ 为月球引力常数；
 F_{thrust} 为主减速发动机的推动力， $1500N < F_{thrust} < 7500$ ；
 v_e 为主减速发动机的比冲；
 ψ 为推力方向角；
 t_0 为软着陆的初始时刻，定义 $t_0 = 0$ ；
 t_f 为着陆时刻， t_f 未知；

5. 模型的建立与求解

5.1 近月点远月点的位置及速度模型的建立与求解

此问题要求嫦娥三号着陆准备轨道的近月点和远月点的位置，嫦娥三号在近月点，远月点的速度大小及方向。因为近月点在月心坐标系的位置和软着陆轨道形态共同决定了着陆点的位置，因此可根据预定着陆点的位置和软着陆过程计算近月点的位置，远月点的位置近月点与月心连线的延长线上距月球表面100km处。嫦娥三号在近月点，远月点的速度可根据卫星在宇宙中的运动规律求得。



远月点

图 1 嫦娥三号近月轨道示意图

在着陆准备轨道上,嫦娥三号从远月点到近月点运动过程中,只有月球的引力做功,符合机械能守恒的条件,即此过程中,嫦娥三号的机械能守恒。

选月心为零势能点,则嫦娥三号在远月点的机械能为

$$E_1 = \frac{1}{2}m_0v_1^2 + \frac{GMm_0}{R_1^2} \times R_1;$$

嫦娥三号在近月点的机械能为

$$E_2 = \frac{1}{2}m_0v_2^2 + \frac{GMm_0}{R_2^2} \times R_1;$$

根据机械能守恒 $E_1 = E_2$ 有,

$$\frac{1}{2}m_0v_1^2 + \frac{GMm_0}{R_1^2} \times R_1 = \frac{1}{2}m_0v_2^2 + \frac{GMm_0}{R_2^2} \times R_2;$$

式中, G 为万有引力常量,为定值, $G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$; M 为月球的质量; m_0 为嫦娥三号在着陆准备轨道上的飞行质量; v_1 为嫦娥三号在远月点的速度; v_2 为嫦娥三号在近月点的速度; R_1 为月心到远月点的距离; R_2 为月心到近月点的距离;

根据数学知识,椭圆的曲率半径由公式 $\rho = \frac{\left((x'^2 - v'^2)^{\frac{3}{2}} \right)}{v''x' - x''v'}$ 给出,为了便于求导,借助椭圆的参数方程 $x = a \cos \phi, y = b \sin \phi$ (a, b 分别为椭圆的半长轴、半短轴),把 x, y 得一、二阶导数代入曲率半径公式 ρ 的表达式,有 $\rho = \frac{\left(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi \right)^{\frac{3}{2}}}{ab}$ 。在远月点和近月点,参数 ϕ 分别取 $0, \pi$ 代入,得到在椭圆上 $(\pm a, 0)$ 这两个点所在处的曲率半径相同。即远月点,近月点的曲率半径相同。由天体运动的万有引力公式

$$\begin{cases} \frac{GMm_0}{R_1^2} = m_0 \frac{v_1^2}{\rho} \\ \frac{GMm_0}{R_2^2} = m_0 \frac{v_2^2}{\rho} \end{cases}$$

式中, ρ 为准备着陆轨道的曲率半径; v_2 为近月点的速度; R_2 为月心到近月点的距离。上述两式作比得:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_2}{R_1};$$

即开普勒第二定律(面积定律)。

综上,求速度的数学模型为

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_0v_1^2 + \frac{GMm_0}{R_1^2} \times R_1 = \frac{1}{2}m_0v_2^2 + \frac{GMm_0}{R_2^2} \times R_2; \\ \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2}; \end{cases}$$

带入数据求得：

$$\begin{aligned} v_1 &= 1.613\text{km/s}; \text{方向为运动轨道的切线方向;} \\ v_2 &= 1.692\text{km/s}; \text{方向为运动轨道的切线方向;} \end{aligned}$$

要求近月点的位置，可以根据预定着陆点的位置和软着陆主减速过程计算近月点的位置。软着陆主减速过程即是从近月点 15 km 处到距离预定着陆点 3 km 处的制动减速阶段。由附件一知，嫦娥三号将在近月点 15 公里处以抛物线下降，嫦娥三号呈抛物线运动，则说明从 15 km 到 3 km 处，嫦娥三号的加速度 a 的大小是恒定的。根据物理知识，合外力 $F_{\text{合}} = ma$ ，制动减速过程中， a 的大小恒定，但在运动过程中，随着燃料的燃烧，嫦娥三号的飞行质量是逐渐减小的，主减速发动机的推动力 F_{thrust} 是可以调节的。

从 15 km 到 3 km 处，是嫦娥三号整个软着陆过程的主减速阶段，因此制动减速阶段，最初的推动力一定最大，即 7500 N。因为制动减速过程中，嫦娥三号的加速度 a 的大小是恒定的，因此只考虑近月点处的初加速度即可。

近月点处，月球的引力产生的加速度

$$a_{\text{引}} = \frac{GM}{R_2^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 7.3477 \times 10^{22}}{(1737103 + 15000)^2} = 1.597\text{m/s}^2;$$

方向为指向月心垂直向下的。

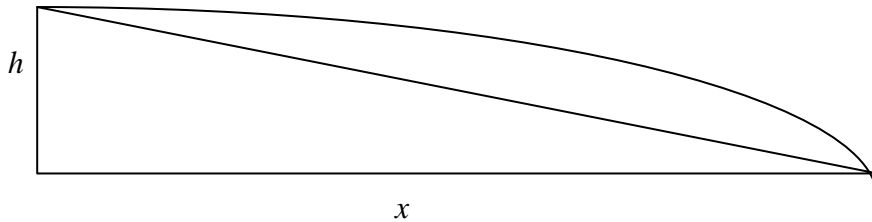


图 2 制动减速阶段抛物线示意图

上图为制动减速过程中的运动轨迹抛物线，分解到水平和竖直方向上，其中 $h = 15000 - 3000 = 12000\text{m}$ ； x 为制动减速过程中的水平距离。

已知，竖直方向上的初速度为 0。因此对竖直方向满足方程 $h = \frac{1}{2}a_{y0}t^2$ ，根据嫦娥三号的实际数据，制动减速阶段的飞行时间 $t = 355\text{s}$ 。式中， a_{y0} 表示制动减速阶段竖直方向上的加速度。

$a_{y0} = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \times 12000}{355^2} = 0.190\text{m/s}^2$ ；方向为指向月心垂直向下的。

嫦娥三号在制动减速阶段，只受推动力和月球引力的作用。已知竖直方向上的合加速度 $a_{y0} = 0.190\text{m/s}^2$ ，月球的引力产生的加速度 $a_{\text{引}} = 1.597\text{m/s}^2$ ，方向均为指向月心垂直向下的，推动力 F_{thrust} 是阻力，竖直方向上产生的加速度

$$a_y = 1.597 - 0.190 = 1.407\text{m/s}^2;$$

方向为背离月心垂直向上。

推动力产生的合加速度 $a_{thrust} = \frac{F_{thrust}}{m_0} = \frac{7500}{2400} = 3.125m/s^2$ ，方向与主推动机的方向相反。

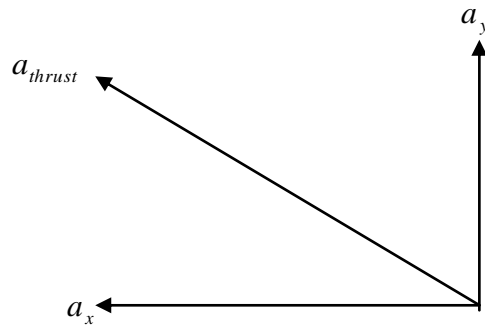


图3 近月点初加速度的分解

由加速度的分解和勾股定理得，

$$a_x = \sqrt{a_{thrust}^2 - a_y^2} = \sqrt{3.125^2 - 1.407^2} = 2.790m/s^2;$$

方向与运动方向相反。

水平方向上的航程

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} a_x t^2 = 1692 \times 355 - \frac{1}{2} \times 2.790 \times 355^2 = 425km,$$

制动减速阶段的总航程

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{425^2 + 12^2} = 426km。$$

因此，近月点的位置应为距预定着陆点 425km 的圆周上任意一点的正上方 15km 处。

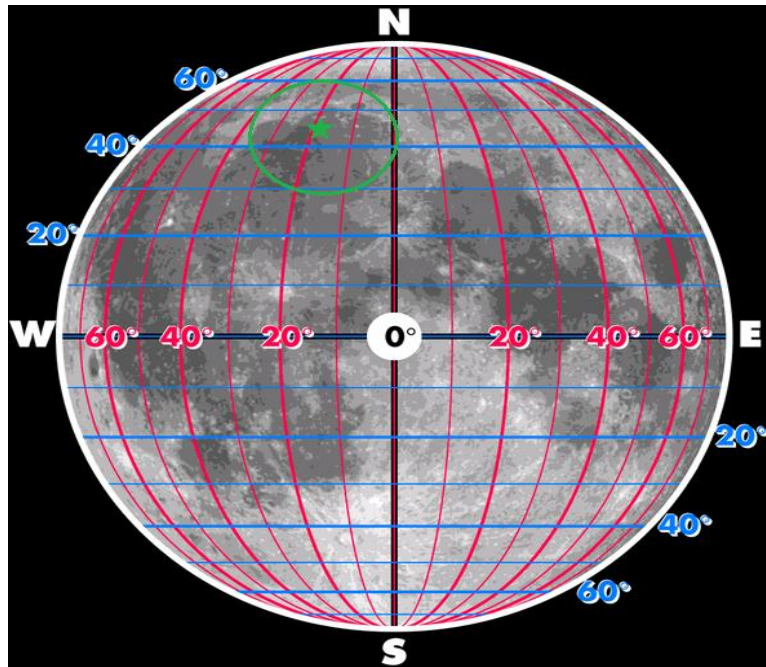


图4 近月点位置示意图

题中，已知着陆点的位置为 (19.51W, 44.12N)，如图4中绿色五角星所在位置，近月点的位置也用经纬度来表示，根据着陆点与近月点正下方的距离，图4中绿色圆周所表示的位置，均是近月点正下方的位置。

利用月球经纬度的划分规则，以及月球的赤道半径为 1737.646km，月球的极半径为

1735.843km,; 利用分割, 近似, 求和, 取极限的思想, 计算得,

近月点的经纬度范围为 $[1.26E, 40.28W], [29.48N, 58.76N]$; 根据月球经纬度对称的原理, 远月点的经纬度范围为 $[178.74W, 139.72E], [29.48S, 58.76S]$ 。

综上, 近月点的位置: 距离着陆点 $425km$, 经纬度范围为

$[1.26E, 40.28W], [29.48N, 58.76N]$ 的圆周正上方 $15km$ 处;

远月点的位置: 距离 $[170.49E, 44.12S]$ $425km$, 经纬度范围为

$[178.74W, 139.72E], [29.48S, 58.76S]$ 的圆周正上方 $100km$ 处。

5.2 着陆轨道和在6个阶段的最优控制策略模型的建立与求解

此问题要求确定嫦娥三号的着陆轨道和在6个阶段的最优控制策略。嫦娥三号的着陆轨道包括着陆准备轨道和软着陆轨道, 6个阶段为着陆准备轨道, 主减速段, 快速调整段, 粗避障段, 精避障段, 缓速下降阶段, 下面将分别考虑6个阶段的最优控制策略, 在每个阶段里确定每一阶段的着陆轨道, 将6段着陆轨道连接起来即是嫦娥三号的着陆轨道。

5.2.1 着陆准备轨道阶段

考虑嫦娥三号的着陆准备轨道, 根据嫦娥三号的飞行状态, 是由 $100km$ 环月圆轨道进入着陆准备轨道的, 关键在于远月点的选择, 确定了远月点即是确定了近月点, 着陆准备轨道就可确定。

根据问题一中确定的远月点的位置距离 $[170.49E, 44.12S]$ $425km$, 经纬度范围为 $[178.74W, 139.72E], [29.48S, 58.76S]$ 的圆周正上方 $100km$ 处。因此, 当嫦娥三号在 $100km$ 环月圆轨道上运动时, 首先利用经纬度探测器, 定位经纬度的位置, 若所定位的经纬度在 $[178.74W, 139.72E], [29.48S, 58.76S]$ 范围内时, 再利用距离探测器, 精算当时所在位置距离 $[170.49E, 44.12S]$ 的位置, 若距离为 $425km$, 则加速发动机进行加速变轨。若距离不是 $425km$, 则继续飞行, 探测下一点的位置, 并进行定位计算, 直至找到最佳位置。

寻找远月点位置的过程, 利用遍历的思想, 下面将介绍遍历的主要思想和具体步骤:

(1) 从图中某个顶点 V_0 出发, 并访问此顶点;

(2) 从 V_0 出发, 访问 V_0 的各个未曾访问的邻接点 W_1, W_2, \dots, W_k ; 然后, 依次从 W_1, W_2, \dots, W_k 出发访问各自未被访问的邻接点;

(3) 重复步骤2, 直到全部顶点都被访问为止。

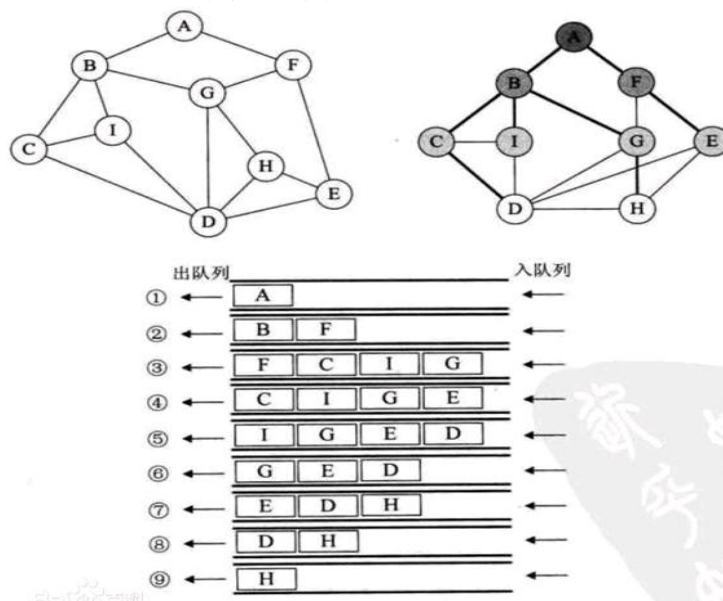


图5 遍历思想图解

5.2.2 主减速阶段

从 15km 的轨道高度软着陆到距月球表面 3km 处的时间比较短，一般在几百秒的范围内，所以诸如月球引力非球项、日月引力摄动等影响因素均可忽略不计，所以这一过程可以在二体模型下描述。建立如下月心极坐标系：

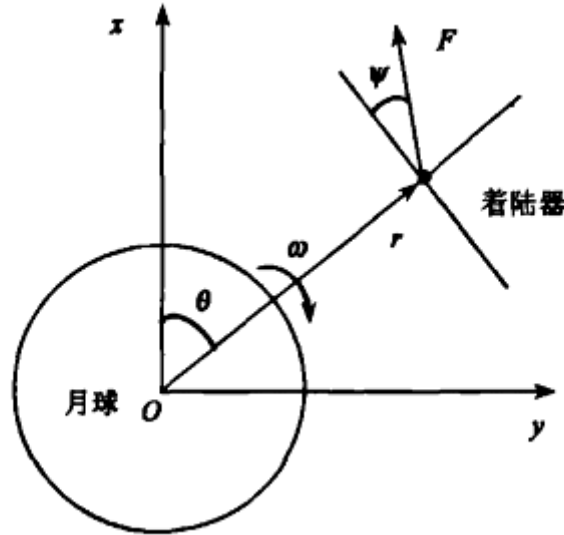


图 6 月球软着陆极坐标系

其中， O 为月球质心； x 轴方向为由月心指向着陆器的初始位置； y 轴方向为初始完为止着陆器速度方向。建立着陆器的运动学方程组：

$$\begin{cases} \dot{r} = v; \\ v = \frac{F_{thrust}}{m} \sin \psi - \frac{\mu}{r^2} + r\omega^2; \\ \dot{\theta} = \omega; \\ \omega = -\frac{\left(\frac{F_{thrust}}{m}\right) \cos \psi + 2v\omega}{r}; \\ \dot{m} = -\frac{F_{thrust}}{v_e}; \end{cases}$$

式中， r 为着陆器距月心失径； v 为着陆器在 r 方向上的速度； θ 为着陆器环绕月球表面的航程角； ω 为航程角的角速度； m 为着陆器质量； μ 为月球引力常数； F_{thrust} 为主减速发动机的推动力， $1500N < F_{thrust} < 7500$ ； v_e 为主减速发动机的比冲； ψ 为推力方向角，即推力方向与当地水平面的夹角，取锐角，向上为正，向下为负。

在轨道优化过程中，由于各状态变量的量级相差较大，寻求优化中可能会导致有效位数的丢失。通过归一化可以克服这一缺点，提高计算精度。对上面着陆器的运动学方程组进行归一化出来，得：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = v; \\ \dot{v} = \frac{F_{thrust}}{m} \sin \psi - \frac{\mu}{r^2} + r\omega^2; \\ \dot{\theta} = \omega; \\ \dot{\omega} = -\frac{\left(\frac{F_{thrust}}{m}\right) \cos \psi + 2v\omega}{r}; \\ \dot{m} = -\frac{F_{thrust}}{v_e}; \end{array} \right.$$

最优软着陆轨道设计的目的是使性能目标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt = m(0) - m(t_f);$$

取最小值，并且满足主减速终端条件

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t_f) = (R + 3000); \\ v(\theta(t_f)) = 57; \end{array} \right.$$

式中， t_0 为软着陆的初始时刻，定义 $t_0 = 0$ ，该时刻的状态参数由椭圆轨道的近月点确定； t_f 为着陆时刻， t_f 未知； R 为月球平均半径， $R = 1737.013km$ 。

嫦娥三号的主减速发动机为推力可调节发动机，但根据 Pontryagin 最大值原理，无奇异情况下，推力应由开关控制：或者以最大推力工作，或者为零。理论上，需分析切换点，通常为了简化问题，采用常推力假设，即认为主减速发动机一直以最大推力工作，即 $F_{thrust} = 7500$ 。此假设既有利于优化，又可以降低发动机的复杂性。

通过以上分析，月球软着陆问题的主减速阶段的最优控制策略问题是一类终端时间自由型且受终端约束的最优控制问题。解决此类问题的两种经典方法，一种是将终端时间作为设计变量进行优化，缺点是会增加计算量，甚至难以收敛，不利于快速优化；另一种方法是通过引入能量变量替换积分变量，将其转化为终端积分变量固定型最优控制问题。但在月球最优软着陆是，能量并不是均匀变化的，在着陆点附近，能量变化率趋于零，以能量为积分变量的数值误差较大，而微笑的能量误差将会带来很大的状态误差，且优化迭代过程是未知的，当沿着非最优轨迹时，能量不一定是单调变化的，这将导致基于能量的积分无法进行。

鉴于以上分析，选择状态量 ω 作为积分变量。只要推力方向角在 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 范围内， ω 的单调性就有保证，且其变化较为均匀。为保证积分变量单调递增，引入变量 $\omega' = -\omega$ ，则

$$\frac{d\omega'}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} = \frac{\left(\frac{F_{thrust}}{m}\right) \cos \psi + 2v\omega}{r}$$

将着陆器的软着陆方程组进行积分变换，得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{d\omega'} = \frac{v}{f\omega'}; \\ \frac{dv}{d\omega'} = \frac{\left(\frac{F_{thrust}}{m}\right)\sin\psi - \left(\frac{\mu}{r^2}\right) + r\omega'^2}{f\omega'}; \\ \frac{d\theta}{d\omega'} = \frac{\omega}{f\omega'}; \\ \frac{d\omega}{d\omega'} = -1; \\ \frac{dm}{d\omega'} = -\frac{F_{thrust}}{v_e} \times \frac{1}{f\omega'}; \\ f\omega' = \frac{d\omega'}{dt} = \frac{\left(\frac{F_{thrust}}{m}\right)\cos\psi + 2v\omega}{r}; \\ \frac{dt}{d\omega'} = \frac{1}{\frac{d\omega'}{dt}} = \frac{r}{\left(\frac{F_{thrust}}{m}\right)\cos\psi + 2v\omega}; \end{array} \right.$$

积分变换后的性能目标函数为

$$J = \int_{\omega_0}^{\omega_f} \left(\frac{dm}{d\omega'} \right) d\omega' = m(\omega_0) - m(\omega_f);$$

积分变换后的约束条件为

$$\begin{cases} r(\omega_f) = (R + 3000); \\ v(\omega_f) = 57; \end{cases}$$

原终端积分变量不确定型最优控制问题转化为终端积分变量固定型最优控制问题。转化后的问题一方面更适合优化数值算法求解；另一方面终端约束条件减少了一个，终端约束更容易满足，收敛速度更快。

将软着陆终端积分变量固定型最优控制问题，转化为非线性规划问题求解。对于由最优控制问题转化成的非线性规划问题，从优化变量得出目标函数和约束条件时，需要借助于数值积分。常用的经典四阶Runge-Kutta积分方法计算量偏大，不利于快速优化；四步四阶Admas外推方法计算量小，但其截断误差系数过大，精度偏低；四阶Admas预测—校正方法，其精度与四阶Runge-Kutta方法不相上下，但计算量只有后者的一半，可用于着陆器软着陆的快速优化。

为保证优化精度，将软着陆终端积分变量固定型最优控制问题，转化为非线性规划问题时，采用精度较高的直接离散化方法。

直接离散化方法将整个最优控制过程根据积分变量分成若干个段，段的端点成为节点；选择节点处的控制变量作为优化参数，通过插值得到整个最优过程的控制变量；根据控制变量积分状态方程形成目标函数和约束条件，得到软着陆的数学规划问题模型：

(1) 将整个飞行过程分为 N 段，形成 $N+1$ 个节点 ω_i' ($i=0,1,2,\dots,N$)，取 ω_i' 时刻的控制量 ψ_i 为优化变量，共有 $N+1$ 个变量；

(2) 整个飞行过程的控制量可以通过在各个节点处线性插值得到, 即

$$\psi_i(\omega') = \psi_i + \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\omega'_{i+1} - \omega'_i} (\omega' - \omega'_i), \omega'_i \leq \omega' < \omega'_{i+1}, i = 0, 1, 2, \dots, N-1;$$

(3) 采用四阶—校正方法, 从积分状态方程, 得到目标函数和约束条件。

经以上处理, 月球最优软着陆问题转化为非线性规划问题。下面讨论解决有约束的非线性规划问题的快速求解方法。

广义乘子法是解决具有等式约束的非线性规划问题的经典方法, 可用广义乘子法解决月球最优软着陆问题。

具有等式约束的非线性规划问题的标准形式为

$$\begin{aligned} \min f(x); \\ \text{st } h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, l; \end{aligned}$$

式中, $f, h_j (j = 0, 1, 2, \dots, l)$ 为二次连续可微函数, x 为 n 维待优化参数向量。

定义增广 Lagrange 函数

$$\Phi(x, \lambda, \sigma) = f(x) - \lambda^T h(x) + \frac{\sigma}{2} h^T(x)h(x);$$

式中, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l]^T, h = [h_1(x), h_2(x), \dots, h_l(x)]^T$ 。

采用广义乘子法快速求解具有等式约束的非线性规划问题的标准形式的具体步骤:

(1) 给定初始点 $x^{(0)}$, 乘子向量初始估计 $\lambda^{(1)}$, 初始罚因子 σ , 允许误差 $\varepsilon > 0$, 参数 $\alpha > 1, \beta \in (0, 1)$, 置 $k = 1$ 。

(2) 以 $x^{(k-1)}$ 为初始点, 解无约束最优化问题

$$\min \Phi(x, \lambda, \sigma)$$

得到解 $x^{(k)}$ 。

广义乘子法的主要作用是将有等式约束的非线性规划问题转化为无约束的非线性规划问题。而拟牛顿法是无约束最优化方法中最有效的一类算法, 此处采用拟牛顿法中的 BFGS 算法。

BFGS 算法的基本思想是, 在 x_{k+1} 处按以下方法产生一个对称正定矩阵 H_{k+1}^{BFGS} ,

$$H_{k+1}^{BFGS} = H_k + \left(\frac{1 + q^{(k)T} H_k q^{(k)}}{p^{(k)T} q^{(k)}} \right) \frac{p^{(k)} p^{(k)T}}{p^{(k)T} q^{(k)}} - \frac{p^{(k)} q^{(k)T} H_k + H_k q^{(k)} p^{(k)T}}{p^{(k)T} q^{(k)}};$$

式中, $p^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$; $q^{(k)} = g_{k+1} - g_k$; $g_{k+1} = \nabla f(x^{(k+1)})$, 可以通过有限差分得出; $x^{(k+1)}$ 和 $x^{(k)}$ 为两个迭代点。以 $d^{(k+1)} = -H_{k+1}^{BFGS} g_{k+1}$ 为 $x^{(k+1)}$ 处的搜索方向。

利用 1STOPT 软件计算并对结果进行分析。

假设月球软着陆初始条件为: $r_0 = 1737 + 15 = 1752 \text{ km}$; $v_0 = 0$; $\theta_0 \in (-10^\circ, 10^\circ)$; $t_0 = 0$; $m_0 = 2400 \text{ kg}$; $\omega'_0 = -11.84 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$; 月球引力常数 $\mu = 4902.75 \text{ km}^3/\text{s}^2$; 月球半径 $R = 1737 \text{ km}$; 制动发动机推力 $F_{thrust} = 7500 \text{ N}$; 比冲 $v_e = 2940 \text{ m/s}$; 飞行过程分为 $N=30$ 段, 控制量初值 $\psi_i = 0, (i = 0, 1, 2, \dots, N)$; 积分步长 $step = 3.86 \times 10^{-6} \text{ s}$; 其他参数取值分别为: $\lambda^{(1)} = [10, 10]^T, \sigma = 20, \alpha = 2, \beta = 0.5$ 。

优化结果为

$$\begin{aligned} t_f &= 493.038 \text{ s}; \\ v_f &= 45.237 \text{ m/s}; \end{aligned}$$

$$\omega_f = 0.000329 \text{ rad/s};$$

$$J = 1079.082 \text{ kg}。$$

为更加形象的说明最优控制结果，并给出此阶段的软着陆轨道，以下说明四个最优参数的变化曲线。

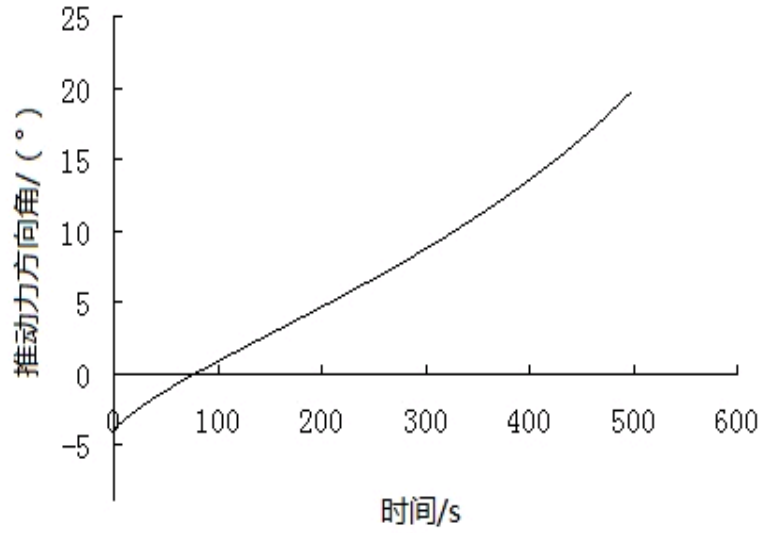


图7 推力方向角 ψ 变化曲线

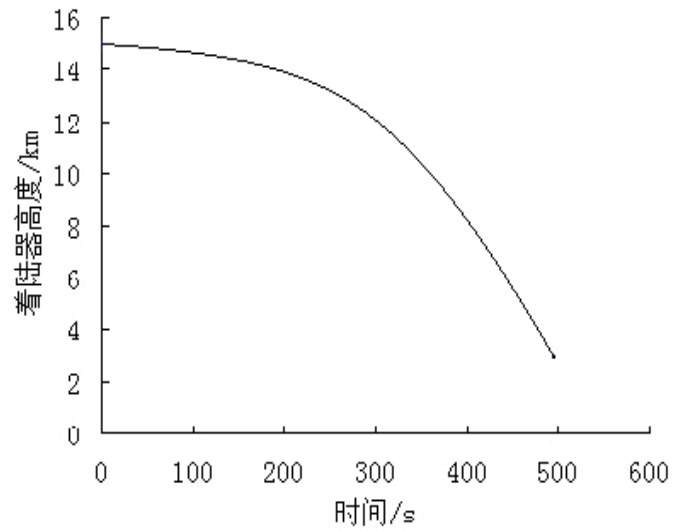


图8 着陆器高度 h 变化曲线

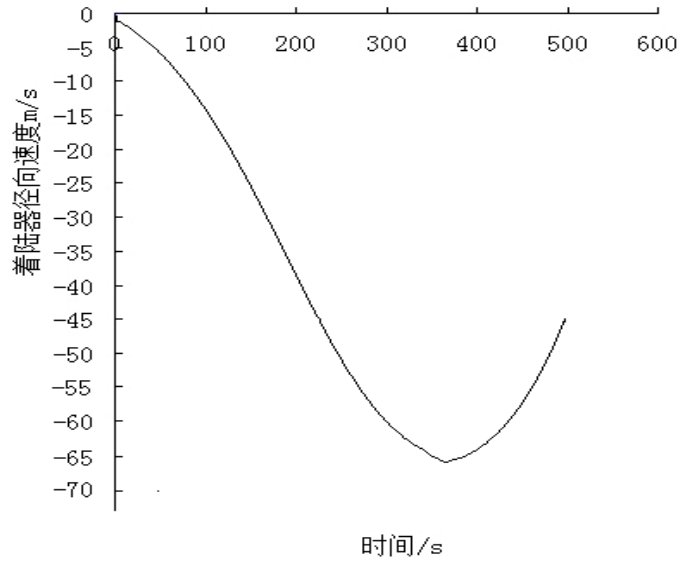


图9 着陆器径向速度 v 变化曲线

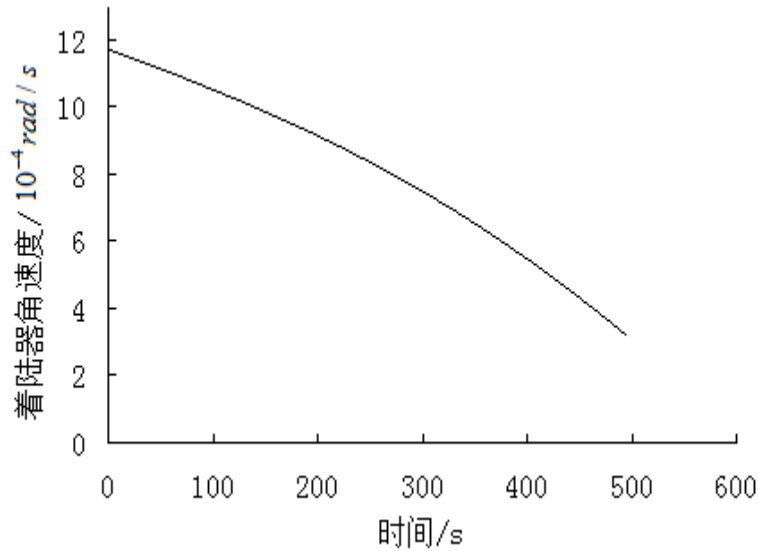


图10 着陆器角速度 ω 变化曲线

5.2.3 快速调整阶段

由主减速阶段的仿真计算结果知，快速调整阶段的初状态为

$$r = 45m/s; v_{\text{水平}} = 35m/s。$$

此阶段的要求为水平方向速度降为 $0m/s$ ，即 $v_{\text{水平}}(t_f) = 0m/s$ ；快速调整的时间最短，

目标函数除主减速阶段的燃料性能指标最小，即 $J = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt$ 最小之外，还存在 $\min t_f$ 为另一目标。

根据Pontryagin最大值原理，无奇异情况下，推力应由开关控制：或者以最大推力工作，或者为零。在此阶段的处理中，仍取 $F_{\text{thrust}} = 7500N$ 。

建立快速调整阶段数学模型：

目标函数：

$$\begin{cases} \min t_f; \\ \min J = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt \end{cases}$$

约束条件为

$$st. \begin{cases} r_{\text{水平}} = v_{\text{水平}}; \\ v_{\text{水平}} = \frac{F_{\text{thrust}}}{m} \sin \psi - \frac{\mu}{r^2} + r\omega^2; \\ \theta = \omega; \\ \omega = -\frac{\left(\frac{F_{\text{thrust}}}{m}\right) \cos \psi + 2v_{\text{水平}}\omega}{r}; \\ \dot{m} = -\frac{F_{\text{thrust}}}{v_e}; \end{cases}$$

终端约束为

$$v_{\text{水平}}(t_f) = 0 \text{ m/s}。$$

利用 MATLAB 编程进行仿真计算并对结果进行分析。

得到如下优化结果

$$t_f = 19 \text{ s};$$

$$J = 60 \text{ kg};$$

对结果分析，快速调整的时间为19s，与嫦娥三号实际运行的速度20s相比，已经得到优化，此阶段消耗的燃料为60kg，相对于嫦娥三号着陆器的质量非常小，较为优化。因此说明，所建立的快速调整阶段的模型为最优控制策略。

对于快速调整阶段的软着陆轨道，将由在此优化控制策略下的速度和角度唯一确定。

5.2.4 粗避障阶段

粗避障主要目的是在较大着陆范围内剔除明显危及着陆安全的大尺度障碍，为精避障提供较好的安全点选取区域，避免出现近距离精避障避无可避的风险，整体上提高系统安全着陆概率。考虑到探测器运动速度较大，要求成像快、计算快。此外，还要综合评估推进剂消耗来选择最优位置。

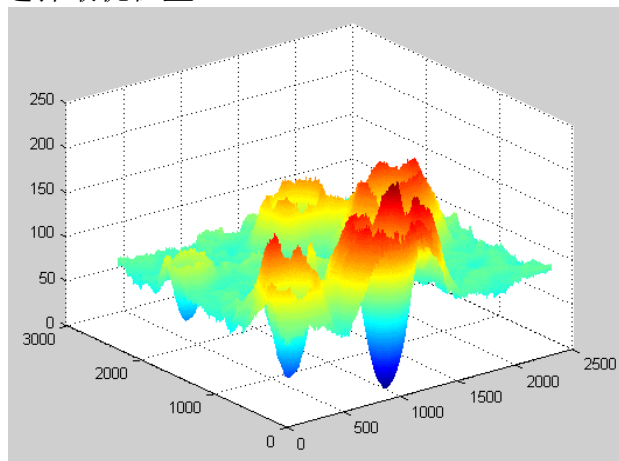


图11 粗避障数字高程图

基于光学图像的粗障碍检测就是利用月球岩石和坑的图像特征识别大障碍，确定安全区域。

月球岩石的最短尺寸与最长尺寸比值为1—0.2，形状一般为圆形、矩形凹坑形或腐蚀的泡形等，高度一般为直径的1/2，标准反照率14%—22%。由此，月面石块图像特征为

- (1) 石头表面具有明显的亮目标特征，亮度大于背景2倍；
- (2) 存在明显的阴影区且紧挨亮目标；
- (3) 亮区与阴影之间存在强对比度，表现为边缘；
- (4) 边缘的法线方向与太阳矢量投影方向一致。

月球撞击坑内斜度一般为 25° — 50° ，平均 35° ，坑外一般 3° — 8° ，平均 5° 。撞击坑图像特征可归纳为：

- (1) 在太阳照射的阳面将出现亮区域；
- (2) 在未照到阴面将出现阴影区域；
- (3) 暗区域的外边缘呈现圆弧。

根据月球岩石和坑的这些特征，设计了粗障碍识别和安全着陆区域的选取算法：

- (1) 图像直方图分析；
- (2) K均值聚类；
- (3) 过亮障碍识别；
- (4) 过暗障碍识别；
- (5) 纹理障碍识别；
- (6) 采用螺旋搜索算法确定每个单元格的安全半径；
- (7) 根据安全半径，选取安全着陆点；
- (8) 评估候选安全着陆点避障所需要的速度增加量；
- (9) 根据安全半径和速度增加量评价值，总结确定安全着陆点。

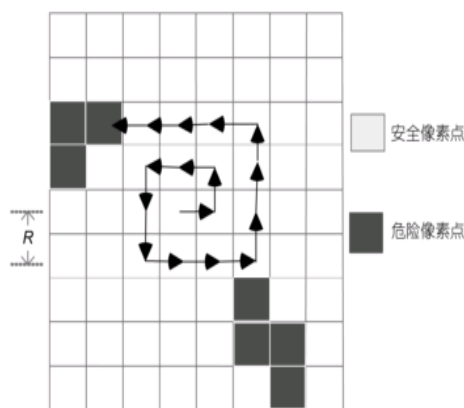


图12 安全半径螺旋搜索算法

5.2.5 精避障阶段

精避障主要目的是在粗避障选取的较安全区域内进行精确的障碍检测，无比识别并剔除危及安全的小尺度障碍，确保了落地安全。

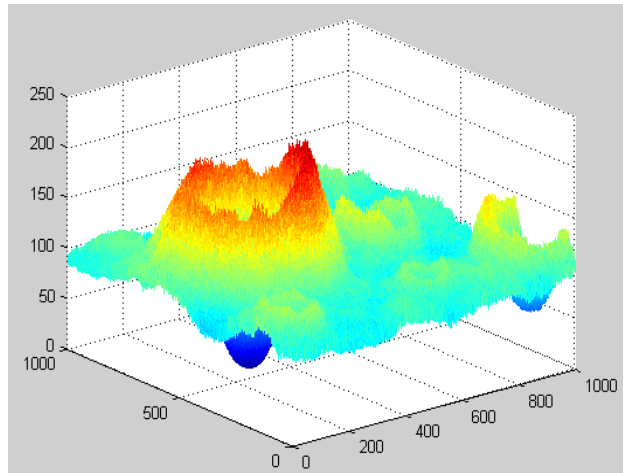


图13 精避障数字高程图

在悬停状态下，三维成像传感器对视场内的着陆区域进行三维成像，获取着陆器相对月面着陆区域的高分辨率斜距数据信息。通过设计的精障碍识别和安全着陆区域选取散发处理这些数据，实现对月面地形障碍识别和安全着陆选取。

设计的精障碍识别和安全着陆选取算法为：

- (1) 数据预处理，主要包括对着陆器姿态和平动速度补偿一节将每个“脚印”的斜距信息换成垂直距离，构建测量坐标系下的地形三维高程图；
- (2) 平均坡面构建，采用最小二乘法拟合一定单元区域的平均坡面；
- (3) 平均坡度计算，根据平均坡面计算该区域的平均坡度；
- (4) 障碍高度计算，根据平均坡面该区域每个单元格的障碍高度；
- (5) 安全着陆区域选取，采用匆匆着陆器中心开始顺时针螺旋千斤搜索的方法，直至找到符合安全着陆要求的着陆区域为止，确定安全着陆点。

若在视场内难以找到完全满足要求的安全着陆区域，则根据坡度和安全半径的加权判断选取最优的区域作为安全着陆区，确定安全着陆点。

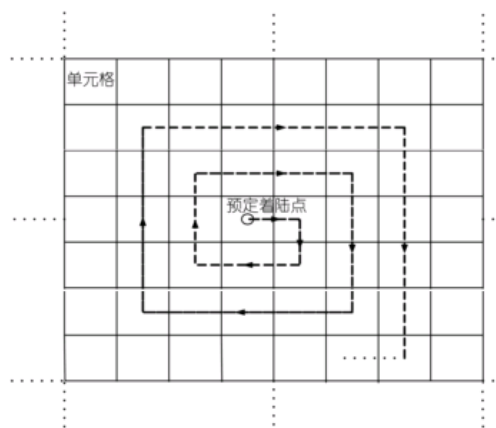


图14 中心螺旋式安全着陆区搜索方法

5.2.6 缓慢下降阶段

缓速下降阶段采用外环加内环制导方式，末位置速度控制目标为零，位置控制目标为进入缓速下降段时的着陆器位置。垂直方向，高度20m以上控制速度和加速度；高度低于20m时，只控加速度且指令加速度稍小于当地月且引力加速度，提高了着陆器安全

下降的可靠性。

基于以上方法，建立缓慢下降阶段数学模型：

目标函数：

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt$$

约束条件：

$$\begin{cases} r = v; \\ v = \frac{F_{thrust}}{m} \sin \psi - \frac{\mu}{r^2} + r\omega^2; \\ \theta = \omega; \\ \omega = -\frac{\left(\frac{F_{thrust}}{m}\right) \cos \psi + 2v\omega}{r}; \\ \dot{m} = -\frac{F_{thrust}}{v_e}; \end{cases}$$

终端约束：

$$v(t_f) = 0m/s;$$

仿真计算结果显示，缓慢下降阶段能量消耗极小。

5.3 着陆轨道和控制策略相应误差分析和敏感性分析模型的建立与求解

5.3.1 误差分析

依据资料中嫦娥三号反馈回的相关数据，将上文建立的着陆轨道及相应控制策略中运用的基于广义乘子法的模型同较为典型的由 Pontryagin 最大值原理得到的理论最优解、基于 SQP 的月球软着陆优化方法得到的结果进行比较。并对所得到的分别的能量消耗、速度、角速度、推动力大小及方向角等进行误差分析。

绝对误差公式：

$$\Delta = X - L$$

相对误差公式：

$$\delta = \Delta/L \times 100\%$$

(Δ —绝对误差， δ —实际相对误差， X —测量值， L —真值)

通过对 3 种不同方法所得到的速度、角速度、推动力大小及方向等进行绝对误差分析及相对误差分析得到，上文建立的模型与理论最优解非常相近。

广义乘子法作为一种直接法，可以对最优控制问题进行快速求解。其得到的数值结果具有较高的精度。同遗传算法、SQP 等其他方法相比，可以节省大量的计算时间，可用于快速优化。采用广义乘子法求解最优控制问题时，减小罚因子的初值，可以增大收敛区间，但会使收敛速度变慢，计算量增加。

5.3.2 敏感性分析

敏感性分析的方法有很多，本文采用模糊方法进行敏感性分析。

敏感性模糊分析的基本方法有以下两种：

(1) 因素变动概率程度估计

设有 m 个不确定因素，考虑他们分别在某范围内变动的概率。现邀请 n 位专家对它

们加以估计，则可得样本

$$\bar{\xi}_{ij} = [x_{ij}, y_{ij}];$$

式中， $[x_{ij}, y_{ij}] \subset [0,1]; i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n$ 。

假定各位专家估计的可靠度相同，则

$$\bar{\xi}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_{ij} = [\bar{x}_i, \bar{y}_i]$$

为因素 i 的概率平均估计。式中：

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}; \bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}; i = 1,2,\dots,m;$$

此时，因素 i 的概率点估计可取为：

$$p_i = \frac{1}{2} \left(\bar{x}_i + \bar{y}_i \right), i = 1,2,\dots,m;$$

上述因素 i 的概率的点估计虽然方法简单，但数据经过两次平均，其可靠性有所降低。

因此，采用模糊估计方法，即减少一次数据平均，直接采用 $\bar{\xi}_i$ 作为因素 i 的概率估计。

(2) 因素敏感性综合决策

设因素集 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ；目标集 $V = \{v_1, v_2\}$ 。式中， v_1 为敏感性， v_2 为随机性。

可得各因素 u_i 的变化率 a_i ，它描述的因素 i 在普遍意义下的敏感性，而 $\bar{\xi}_j$ 描述因素 i 的随机性； p_i 是因素 i 的概率估计。

最后可由

$$a_k p_k = \max_{1 \leq i \leq m} \{u_i p_i\}$$

知 u_k 为综合意义下的敏感因素。

令 η_i 为因素 i 在某范围内变动时相应的指标的变化区间：

$$\eta_i = [l_i, n_i] \quad (i = 1,2,\dots,m)$$

并令

$$\eta_i \bar{\xi}_i = [s_i, t_i]$$

式中，

$$s_i = l_i \bar{x}_i, \quad t_i = n_i \bar{y}_i \quad (i = 1,2,\dots,m)$$

由

$$t_k - s_k = \max_{1 \leq i \leq m} \{t_i - s_i\}$$

可知 u_k 为综合意义下的敏感因素。

6. 模型的优化与改进

在求解近月点和远月点速度时运用开普勒定律和机械能守恒定律求解，可以比较好的求解出它们的速度。但在求解具体位置时，由于月球并不是标准的圆或椭圆，在计算经纬度时，并不能精确的计算，只能给出一个大致的区间。

着陆准备轨道的模型中，在计算距离时，由于计算不精确会导致误差的出现。运用遍历的思想可以找到所有满足要求的点。

主减速阶段将月球引力非球项、日月引力摄动等影响因素忽略不计，会导致一个比

较小的误差；在最优化求解时，均由计算机进行计算仿真，用了归一化、四阶 Adams 预测—校正的方法和广义乘子法减小误差，但给出数据的初值与实际存在一定的偏离，该阶段整体误差较小，得到的数据与实际的嫦娥三号运行得到的参数也比较接近。

快速调整阶段在主减速阶段的基础上进行仿真模拟，得到的参数优于嫦娥三号实际运行的参数，说明该阶段优化度较好，也可能存在一些未考虑全面的因素，导致了该阶段的误差。

粗避障阶段的主要目的是在较大着陆范围内剔除明显危及着陆安全的大尺度障碍并综合推进剂的消耗来考虑，在得到的图像没有问题的情况，该阶段可以比较好的完成大范围避障。

精避障阶段的自主避障精度达到比较好的 1.5 米，误差主要出现在选取最优的着陆点时消耗推进剂的量，消耗较小，误差也较小。

缓速下降阶段较为简单，只需将加速度反向稍大于月球重力加速度，使嫦娥三号在距离地面 4 米时速度基本为 0 即可，消耗较小，误差较小。

7. 参考文献

- [1] 段佳佳，徐世杰，朱建丰，基于蚁群算法的月球软着陆轨迹优化，第29卷第2期：P477-P488, 2008。
- [2] 姜启源，数学模型，北京：高等教育出版社，2007。
- [3] 彭伟斌，吴德隆，用广义乘子法求解航天器最优平面再入轨迹，第 5 卷第 5 期：P10-P16, 2004。
- [4] 付家良，运筹学方法与模型，上海：复旦大学出版社，2005。
- [5] 赵吉松，谷良贤，基于广义乘子法的月球软着陆轨道快速优化设计，第 8 期第 3 卷：P22-P31, 2008。
- [6] 张洪华，嫦娥三号自主避障软着陆控制技术，http://wenku.baidu.com/link?url=GEiCwGnWk0hpcP0e6r7y1femlL0zZR0I8zyroFeeB3GWXe7qg8BVv9hVIzpa75Yxy6OW6N30p-wK8F480G5wEkJYDLa_9Yh63s28bvFn7ai，2014 年 9 月 14 日。

附录

附录一

MATLAB关于像素转化为三位图像的程序

```
I=imread('E:\2014233333\a.tif');
%V=I*0.1;
[x,y]=size(I);
[X,Y]=meshgrid(1:x,1:y);
Pp =double(I);
mesh(X,Y,pp)
shading flat
```

附录二

MATLAB关于运用遍历的方法寻找远月点的程序

```
plate <int max_size>
void Digraph<max_size> ::
depth_first(void (*visit)(Vertex &)) const
{
bool visited [max_size];
Vertex v;
for (all v in G) visited [v] = false;
for (all v in G) if (!visited [v])
traverse (v,visited,visit);
}
template <int max_size>
void Digraph<max_size>::traverse(Vertex &v,bool visited[ ],void
(*visit)(Vertex &)) const
{
Vertex w;
visited [v] = true;
(*visit) (v);
for (all w adjacent to v)
if (!visited [w])
traverse (w,visited,visit);
}
```

附录三

MATLAB关于微分方程（组）求解的程序

M 文件 math1.m

```
function dr=math1(w1,r)
w1=((Ft/m)*cos(x)+2*v*w)/r*f;
dr=v/f*w1;
```

M 文件 math2.m

```
function dv=math2(w1,v)
w1=((Ft/m)*cos(x)+2*v*w)/r*f;
dv=((Ft/m)*sin(x)-u/r*r+r*w*w)/f*w1;
```

M 文件 math3.m

```
function dp=math3(w1,p)
w1=((Ft/m)*cos(x)+2*v*w)/r*f;
dp=w/f*w1;
```

M 文件 math4.m

```
function dw=math4(w1,w)
w1=((Ft/m)*cos(x)+2*v*w)/r*f;
```

```
dw=-1;
```

M 文件 math5.m

```
function dm=math5(w1,m)
w1=((Ft/m)*cos(x)+2*v*w)/r*f;
dm=(-1)*(Ft/Ve)*(1/f*w1);
```

M 文件 math6.m

```
function dt=math6(w1,t)
w1=((Ft/m)*cos(x)+2*v*w)/r*f;
dt=r/((Ft/m)*cos(x)+2*v*w);
```

```
[w1,r]=ode45('math1',[-11.84e-4,-3.29e-4],[1752e+3])
[w1,v]=ode45('math2',[-11.84e-4,-3.29e-4],[0])
[w1,p]=ode45('math3',[-11.84e-4,-3.29e-4],[-10])
[w1,w]=ode45('math4',[-11.84e-4,-3.29e-4],[11.84e-4])
[w1,m]=ode45('math5',[-11.84e-4,-3.29e-4],[2400])
[w1,t]=ode45('math6',[-11.84e-4,-3.29e-4],[0])
```

附录四

MATLAB关于运用BFGS法求解无约束问题最小值的程序

```
function [ x,val,k ]= bfgs( fun,gfun,x0 )
%输入: x0是初始点, fun和gfun分别是目标函数和梯度;
%输出: x、val分别是最优点和最优值, k是迭代次数;
maxk=5000;%最大迭代次数;
h=1700;s=57;
x0=150000;
e=3000;
n=length(x0);
Bk=eye(n);
While k<maxk
    g=feval(gfun,x0);
    if n(g)<e
        break;
    end
    d=-B*g1;
    m=0;mk=0;
    while m<20
        n=s*h^m*g*d;
        o=feval(fun,x0);
        if feval(fun,x0+h^m*d')<feval(fun,x0)+s*r^m*g*d
            mk=m;break;
        end
        m=m+1;
    end
    %BFGS校正
    x=x0+r^mk*dk';
    s=x-x0;
    y=feval(gfun,x)-g;
    if (yk'*sk>0)
        Bk=Bk-(((B*s1)*s)*B)/(s*B*s1)+(y1*y)/(y*s1);
    end
    k=k+1;
    x0=x;
end
val=feval(fun,x0);
end
```