第二章　　函数概念与基本初等函数Ⅰ

考纲导读

（一）函数

1．了解构成函数的要素，了解映射的概念,会求一些简单函数的定义域和值域

2．理解函数的三种表示法：解析法、图象法和列表法，能根据不同的要求选择恰当的方法表示简单的函数。

3．了解分段函数，能用分段函数来解决一些简单的数学问题。

4．理解函数的单调性，会讨论和证明一些简单的函数的单调性；理解函数奇偶性的含义，会判断简单的函数奇偶性。

5．理解函数的最大（小）值及其几何意义，并能求出一些简单的函数的最大（小）值

6．会运用函数图像理解和研究函数的性质

（二）指数函数

1．了解指数函数模型的实际背景。

2．理解有理指数幂的含义，了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算。

3．理解指数函数的概念，会求与指数函数性质有关的问题。

4．知道指数函数是一类重要的函数模型。

（三）对数函数

1．理解对数的概念及其运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数；了解对数在简化运算中的作用。

2．理解对数函数的概念；会求与对数函数性质有关的问题

3．知道对数函数是一类重要的函数模型

4．了解指数函数 与对数函数 互为反函数（ ）。

（四）幂函数

1．了解幂函数的概念。

2．结合函数 的图像，了解它们的变化情况。

（五）函数与方程

1．了解函数零点的概念，结合二次函数的图像，了解函数的零点与方程根的联系。

2．理解并掌握连续函数在某个区间上存在零点的判定方法。能利用函数的图象和性质判别函数零点的个数

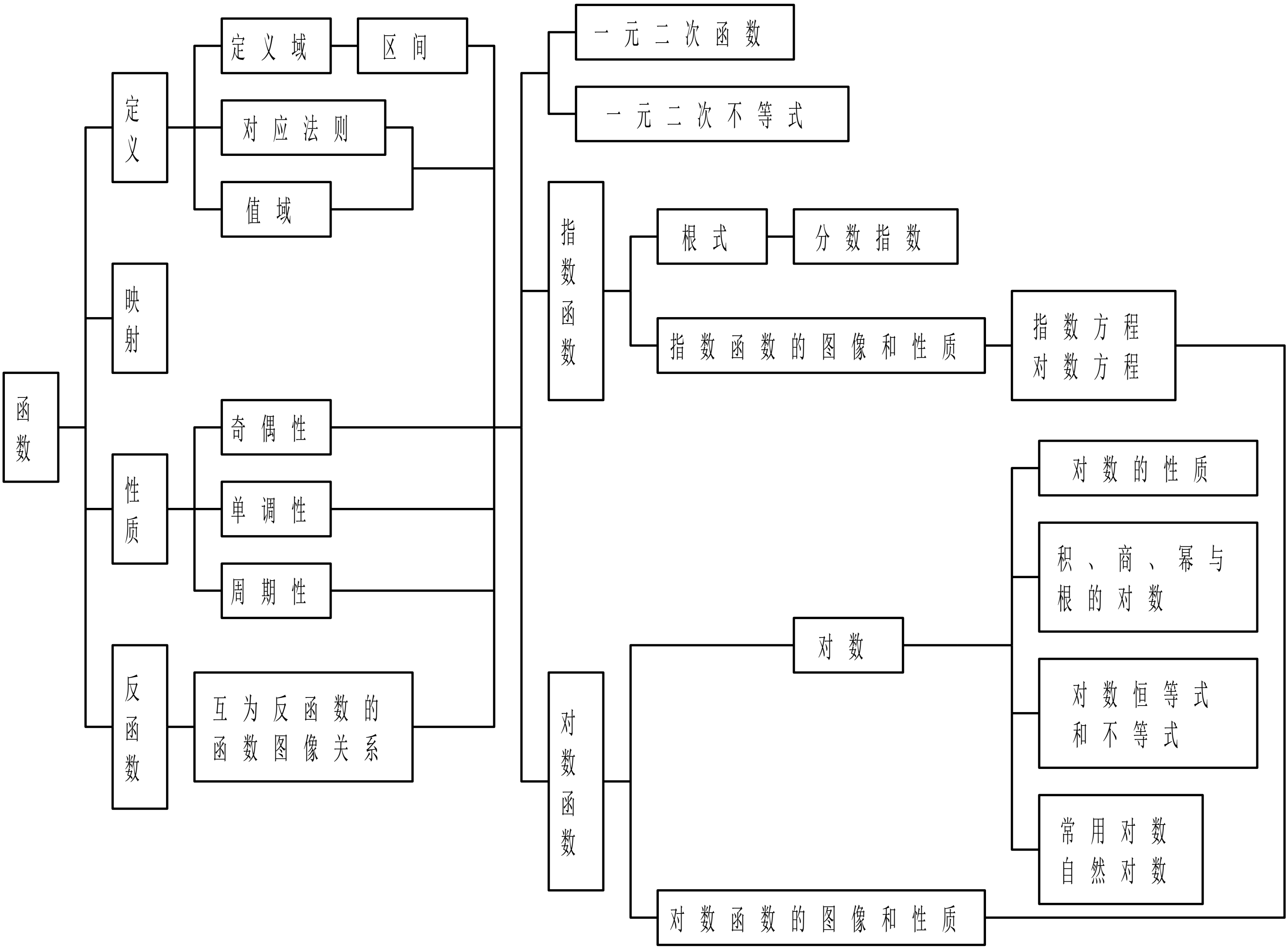
（六）函数模型及其应用

1．了解指数函数、对数函数以及幂函数的增长特征。知道直线上升、指数增长、对数增长等不同函数类型增长的含义。

2．了解函数模型（如指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等在社会生活中普遍使用的函数模型）的广泛应用。

3．能利用给定的函数模型解决简单的实际问题。

知识网络



高考导航

根据考试大纲的要求，结合 2009 年高考的命题情况，我们可以预测 2010 年集合部分在选择、填空和解答题中都有涉及，高考命题热点有以下两个方面：一是集合的运算、集合的有关述语和符号、集合的简单应用等作基础性的考查题型多以选择、填空题的形式出现；二是以函数、方程、三角、不等式等知识为载体，以集合的语言和符号为表现形式

结合简易逻辑知识考查学生的数学思想、数学方法和数学能力，题型常以解答题的形式出现

函数是高考数学的重点内容之一，函数的观点和思想方法贯穿整个高中数学的全过程，包括解决几何问题.在近几年的高考试卷中，选择题、填空题、解答题三种题型中每年都有函数试题，而且常考常新.以基本函数为模型的应用题和综合题是高考命题的新趋势.

考试热点：①考查函数的表示法、定义域、值域、单调性、奇偶性、反函数和函数的图象.②函数与方程、不等式、数列是相互关联的概念，通过对实际问题的抽象分析，建立相应的函数模型并用来解决问题，是考试的热点.③考查运用函数的思想来观察问题、分析问题和解决问题，渗透数形结合和分类讨论的基本数学思想.

第1课时　　函数及其表示

基础过关

一、映射

1．映射：设A、B是两个集合，如果按照某种对应关系 f，对于集合A中的______元素，在集合B中都有___________元素和它对应，这样的对应叫做___________到_________的映射，记作____________________.

2．象与原象：如果 f:A→B是一个A到B的映射，那么和A中的元素 a 对应的_________叫做象，_________叫做原象。

二、函数

1．定义：设A、B是_______，f:A→B是从A到B的一个映射，则映射 f:A→B叫做A到B的，记作____________________.

2．函数的三要素为_____、_____、_____，两个函数当且仅当________分别相同时，二者才能称为同一函数。

3．函数的表示法有______、_______、______。

典型例题

例1. 下列各组函数中，表示同一函数的是（　　）.

A. $y=\sqrt{x-1}\sqrt{x+1},\ y=\sqrt{x^2-1}$　　B. $y=1,\ y=\frac{x}{x}$

C. $y=x,\ y=\sqrt[3]{x^3}$　　D. $y=|x|,\ y=(\sqrt{x})^2$

解： C

变式训练1： 下列函数中，与函数y=x相同的函数是　（　　　）

A. y= $\frac{x^2}{x}$　　B. y=($\sqrt{x}$)²　　C. y=lg10ˣ　　D. y= $2^{\log_2 x}$

解： C

例2. 给出下列两个条件：(1) f($\sqrt{x}$+1)=x+2$\sqrt{x}$;(2)f(x)为二次函数且f(0)=3,f(x+2)-f(x)=4x+2.试分别求出f(x)的解析式.

解：（1）令t=$\sqrt{x}$+1,∴t≥1，x=（t-1）².

则f(t)=(t-1)²+2(t-1)=t²-1,即f(x)=x²-1,x∈［1，+∞).

（2）设f(x)=ax²+bx+c (a≠0),

∴f(x+2)=a(x+2)²+b(x+2)+c,则f(x+2)-f(x)=4ax+4a+2b=4x+2.

∴$\begin{cases}4a=4\\4a+2b=2\end{cases}$，∴$\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$，又f(0)=3⇒c=3,∴f(x)=x²-x+3.

变式训练2：（1）已知f（$\frac{2}{x}$+1）=lgx,求f（x）；

（2）已知f（x）是一次函数，且满足3f（x+1）-2f（x-1）=2x+17，求f（x）；

（3）已知f（x）满足2f（x）+f（$\frac{1}{x}$）=3x，求f（x）.

解：(1)令$\frac{2}{x}$+1=t，则x=$\frac{2}{t-1}$，

∴f（t）=lg，∴f（x）=lg, x∈(1 $\frac{2}{x-1}$,+∞).◆

（2）设f（x）=ax+b，则◆

3f（x+1）-2f（x-1）=3ax+3a+3b-2ax+2a-2b=ax+b+5a=2x+17，◆

∴a=2，b=7，故f（x）=2x+7.◆

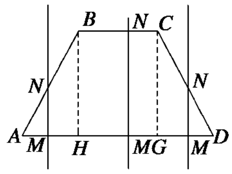
（3）2f（x）+f（）=3x，　　①◆ $\frac{1}{x}$

把①中的x换成，得2f（）+f（x）= $\frac{3}{x}$ ②◆

①×2-②　　得 $\frac{3}{x}$ 3f（x）=6x-，∴f（x）=2x-.

例3． 等腰梯形ABCD的两底分别为AD=2a，BC=a，∠BAD=45°，作直线MN⊥AD交AD于M，交折线ABCD于N，记AM=x，试将梯形ABCD位于直线MN左侧的面积y表示为x的函数，并写出函数的定义域.◆

解： 作BH⊥AD，H为垂足，CG⊥AD，G为垂足，◆



依题意，则有AH=，AG=a.◆ $\frac{a}{2}$ $\frac{3}{2}$

（1）当M位于点H的左侧时，N∈AB，◆

由于AM=x，∠BAD=45°.◆∴MN=x.◆∴y=S△AMN=x²（0≤x≤）.◆ $\frac{1}{2}$ $\frac{a}{2}$

（2）当M位于HG之间时，由于AM=x，◆∴MN=，BN=x-.◆ $\frac{a}{2}$ $\frac{a}{2}$

∴y=S AMNB =［x+（x-）］=ax-◆ $\frac{a^2}{8}(\frac{a}{2}<x\le\frac{3}{2}a).$

（3）当M位于点G的右侧时，由于AM=x，MN=MD=2a-x.◆

∴y=S ABCD－S△MDN= $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}(2a+a)-\frac{1}{2}(2a-x)^2=\frac{3a^2}{4}-\frac{1}{2}(4a^2-4ax+x^2)=-\frac{1}{2}x^2+2ax-\frac{5a^2}{4}(\frac{3}{2}a<x\le2a).$

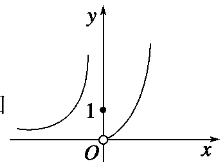
综上：y=

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & x\in\left(0,\frac{a}{2}\right]\\ \frac{1}{2}ax-\frac{a^2}{8} & x\in\left(\frac{a}{2},\frac{3}{2}a\right]\\ -\frac{1}{2}x^2+2ax-\frac{5a^2}{4} & x\in\left(\frac{3}{2}a,2a\right]\end{cases}$$

变式训练3： 已知函数f(x)= $f(x>1)$

（1）画出函数的图象；（2）求f(1)，f(-1)，f的值. $\left[f(-1)\right]$

解：（1）分别作出f(x)在x>0，x=0，x<0段上的图象，如图所示，作法略.



（2）f(1)=1²=1，f(-1)=-f=f(1)=1.

小结归纳

1．了解映射的概念，应紧扣定义，抓住任意性和唯一性.

2．函数的解析式常用求法有：待定系数法、换元法（或凑配法）、解方程组法．使用换元法时，要注意研究定义域的变化.

3．在简单实际问题中建立函数式，首先要选定变量，然后寻找等量关系，求得函数的解析式，还要注意定义域．若函数在定义域的不同子集上的对应法则不同，可用分段函数来表示.

第2课时　　函数的定义域和值域

基础过关

、定义域：

1．函数的定义域就是使函数式＿＿＿＿＿＿＿的集合.

2．常见的三种题型确定定义域：

① 已知函数的解析式，就是＿＿＿＿＿＿＿＿.

② 复合函数 f［g(x)]的有关定义域，就要保证内函数g(x)的＿＿＿＿＿＿域是外函数 f（x)的

域.

③实际应用问题的定义域，就是要使得___________有意义的自变量的取值集合.

二、值域：

1．函数 $y=f(x)$中，与自变量 x的值_________的集合.

2．常见函数的值域求法，就是优先考虑____________，取决于_____________，常用的方法有：①观察法；②配方法；③反函数法；④不等式法；⑤单调性法；⑥数形法；⑦判别式法；⑧有界性法；⑨换元法（又分为____________法和__________法）

例如：① 形如 $y=$，可采用_______ $\frac{2x+\sin x}{3x+2}$ $\frac{x^2}{2+\cos x}$ $(x\neq-\frac{2}{3})$ $\frac{1}{2+x^2}$

法；② $y=$，可采用_______法或___

法；③ $y=a[f(x)]^2+bf(x)+c$，可采用________法；④ $y=x-$，可采用__________法；⑤ $y=x-$，可采用________法；⑥ $y=$可采用________法等.

典型例题

例 1． 求下列函数的定义域：◆

$\frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ （1） y=;◆ $\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{5-x^2}}$ (2) y=; $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$ ◆(3) y=. ◆

解：（1）由题意得化简得 $\begin{cases}x+1\neq 0\\|x|-x>0\end{cases}$，$\begin{cases}x\neq-1\\x<0\end{cases}$，即故函数的定义域为{x|x<0 且 x≠-1}. ◆

（2）由题意可得解得 $\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{5-x^2}\neq 0\\5-x^2\geq 0\end{cases}$，$\begin{cases}x\neq\pm\sqrt{3}\\-\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}\end{cases}$ 故函数的定义域为{x|-≤x≤ 且 x≠±}. ◆

（3）要使函数有意义，必须有◆ $\begin{cases}x+1\geq 0\\x-1\geq 0\end{cases}$，$\begin{cases}x\geq -1\\x\geq 1\end{cases}$

即∴ x≥1, 故函数的定义域为[1，+∞）. ◆

变式训练 1： 求下列函数的定义域：◆

（1） y=+(x-1)⁰ ； (2) y=+(5x-4)⁰; (3) y=+lgcosx;◆ $\frac{\lg(2-x)}{\sqrt{12+x-x^2}}$ $\frac{\lg(x^2-x)}{\sqrt{2x+3}}$ $\frac{1}{\lg(4x+3)}$

解：（1）由 $\begin{cases}2-x>0\\12+x-x^2>0\\x-1\neq 0\end{cases}$ 得◆所以-3<x<2 且 x≠1. ◆

故所求函数的定义域为（-3，1）∪(1,2). ◆

（2）由 $\begin{cases}4x+3>0\\4x+3\neq 1\\5x-4\neq 0\end{cases}$ 得◆∴函数的定义域为 $\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5},+\infty\right)$.

（3）由 $\begin{cases}25-x^2\geq 0\\\cos x>0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)\end{cases}$，借助于数轴，解这个不等式组，得函数的定义域为 $\left[-5,-\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},5\right]$.

例 2． 设函数 y=f(x) 的定义域为[0，1]，求下列函数的定义域. ◆

（1） y=f(3x); (2) y=f(); $\frac{1}{x}$ ◆(3) y=f($f(x+\frac{1}{3})+f(x-\frac{1}{3})$;◆ (4) y=f(x+a)+f(x-a). ◆◆

解：（1）0≤3x≤1, 故 0≤x≤,◆y=f(3x) $\frac{1}{3}$ 的定义域为[0,]. ◆

（2）仿（1）解得定义域为[1，+∞). ◆

（3）由条件，y 的定义域是 f 与定义域 $(x+\frac{1}{3})$ 的交集. ◆

列出不等式组

故y=f的定义域为.

（4）由条件得讨论：◆

① 当即 0≤a≤时，定义域为［a,1-a］;◆

② 当即-≤a≤0 时，定义域为［-a,1+a］.◆

综上所述：当0≤a≤时，定义域为［a，1-a］；当-≤a≤0时，定义域为［-a，1+a］.◆

变式训练2：若函数 f(x)的定义域是［0，1］，则f(x+a)·f(x-a)（0＜a＜）的定义域是 （　　） A.■ B.［a，1-a］◆ C.［-a，1+a］■ D.［0，1］◆

解：■B

例3. 求下列函数的值域：◆

（1）y= (2)y=x-;◆

(3)y=.◆

解：（1）方法一 （配方法）◆

$x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$, ∵y=1-而

∴0＜∴∴值域为.

方法二 （判别式法）

$x^2+(1-y)x+y=0$.由y=得(y-1)

∵y=1时,1.又∵R，∴必须=(1-y)²-4y(y-1)≥0.

∴∵∴函数的值域为.

（2）方法一 （单调性法）◆

定义域，函数y=x,y=-均在上递增，

故y≤ $\frac{1}{2}-\sqrt{1-2\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.

∴函数的值域为.

方法二 （换元法）◆

令 =t，则 t≥0，且 x=◆∴y=-（t+1）²+1≤（t≥0），◆

∴y∈（-∞，］.◆

（3）由y=得，e^x=◆∵e^x＞0,即＞0,解得-1＜y＜1.◆

∴函数的值域为{y|-1＜y＜1}.◆

变式训练3：求下列函数的值域：◆

（1）y=;◆ (2)y=|x|.◆

解：（1）(分离常数法)y=-，∵≠0,

∴y≠-.故函数的值域是{y|y∈R,且y≠-}.◆

(2)方法一 (换元法)◆

∵1-x²≥0，令 x=sin，则有 y=|sincos|=|sin2|,◆

故函数值域为［0，］.

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{-x^4+x^2}=\sqrt{-(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$, 方法二 y=|x|·

∴0≤y≤$\frac{1}{2}$即函数的值域为$\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

例4．若函数f（x）=x^2-x+a的定义域和值域均为［1，b］（b＞1），求a、b的值.◆

解：∵f（x）=$(x-1)^2$+a-$\frac{1}{2}$.

∴其对称轴为x=1，即［1，b］为f（x）的单调递增区间.

∴f（x）$_{min}$=f（1）=a-$\frac{1}{2}$=1　　①

f（x）$_{max}$=f（b）=b^2-b+a=b　②

由①②解得$\begin{cases}a=\frac{3}{2},\\ b=3.\end{cases}$

变式训练4：已知函数f(x)=x^2-4ax+2a+6 (x∈R).◆

（1）求函数的值域为［0，+∞)时的a的值；◆

（2）若函数的值均为非负值，求函数f(a)=2-a|a+3|的值域.◆

解：（1）∵函数的值域为［0，+∞)，◆

∴Δ=16a^2-4(2a+6)=0 2a^2-a-3=0∴a=-1或a=$\frac{3}{2}$.◆

（2）对一切x∈R，函数值均非负，∴Δ=8(2a^2-a-3)≤0 -1≤a≤$\frac{3}{2}$，∴a+3＞0，◆

∴f(a)=2-a(a+3)=-a^2-3a+2=-(a+$\frac{3}{2}$)^2+$\frac{17}{4}$(a$\in\left[-1,\frac{3}{2}\right]$).

∵二次函数f(a)在$\left[-1,\frac{3}{2}\right]$上单调递减，∴f（a）$_{min}$=f$\left(\frac{3}{2}\right)$=-$\frac{19}{4}$，f（a）$_{max}$=f（-1）=4，◆

∴f(a)的值域为$\left[-\frac{19}{4},4\right]$.

小结归纳

1．求函数的定义域一般有三类问题：一是给出解析式（如例1），应抓住使整个解式有意义的自变量的集合；二是未给出解析式（如例2），就应抓住内函数的值域就是外函数的定义域；三是实际问题，此时函数的定义域除使解析式有意义外，还应使实际问题或几何问题有意义.

2．求函数的值域没有通用方法和固定模式，除了掌握常用方法（如直接法、单调性法、有界性法、配方法、换元法、判别式法、不等式法、图象法）外，应根据问题的不同特点，综合而灵活地选择方法.

第3课时　　函数的单调性

基础过关

一、单调性

1．定义：如果函数$y=f(x)$对于属于定义域I内某个区间上的任意两个自变量的值x_1、x_2，当x_1<x_2时，①都有________，则称$f(x)$在这个区间上是增函数，而这个区间称函数的一个__________；②都有__________，则称$f(x)$在这个区间上是减函数，而这个区间称函数的一个__________.

若函数$f(x)$在整个定义域l内只有唯一的一个单调区间，则$f(x)$称为________.

2．判断单调性的方法：

(1) 定义法，其步骤为：①______；②______；③______.

(2) 导数法，若函数$y=f(x)$在定义域内的某个区间上可导，①若______________，则$f(x)$在这个区间上是增函数；②若__________，则$f(x)$在这个区间上是减函数.

二、单调性的有关结论

1．若$f(x)$，$g(x)$均为增(减)函数，则$f(x)+g(x)$________函数；

2．若$f(x)$为增(减)函数，则$-f(x)$为_________；

3．互为反函数的两个函数有________的单调性；

4．复合函数 $y=f\,[g(x)]$ 是定义在M上的函数，若 $f\,(x)$ 与 $g(x)$ 的单调相同，则 $f\,[g(x)]$ 为_________，若 $f\,(x)$，$g(x)$ 的单调性相反，则 $f\,[g(x)]$ 为_________.

5．奇函数在其对称区间上的单调性_______，偶函数在其对称区间上的单调性__________.

典型例题

例 1. 已知函数 f(x)=a^x+ (a＞1)，证明： $\frac{x-2}{x+1}$ 函数 f(x)在(-1,+∞)上为增函数.◆

证明 方法一 任取 $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，

不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$， ＞1 且 $a^{x_2-x_1}$ a^{x_1} ＞0，◆

$$a^{x_2}-a^{x_1}=a^{x_1}(a^{x_2-x_1}-1)>0$$

∴，又∵ $x_1+1>0$，$x_2+1>0$，◆

$$\frac{x_2-2}{x_2+1}-\frac{x_1-2}{x_1+1}=\frac{(x_2-2)(x_1+1)-(x_1-2)(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{3(x_2-x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

∴ ＞0，◆

于是 $a^{x_2}-a^{x_1}$ $\frac{x_2-2}{x_2+1}-\frac{x_1-2}{x_1+1}$

f(x_2)-f(x_1)=+＞0，◆

故函数 f(x)在（-1,+∞）上为增函数.◆

方法二 f(x)=a^x+1-(a＞1)，◆ $\frac{3}{x+1}$

$f'(x)$ 求导数得=a^xlna+，∵a＞1，∴当 x＞-1 时，$\frac{3}{(x+1)^2}$ a^xlna＞0，＞0，◆

＞0 在（-1，+∞）上恒成立，则 $f'(x)$ f(x)在（-1,+∞）上为增函数.◆

方法三 ∵a＞1，∴y=a^x为增函数，◆

$\frac{x-2}{x+1}=1+\frac{-3}{x+1}$ 又 y=，在（-1，+∞）上也是增函数.◆

∴y=a^x+在（-1，+∞）上为增函数. $\frac{x-2}{x+1}$

变式训练 1： 讨论函数 f（x）=x+（a＞ 0）的单调性.◆ $\frac{a}{x}$

解： 方法一 显然 f（x）为奇函数，所以先讨论函数 f（x）在（0，+∞）上的单调性，

设 $x_1>x_2>0$，则◆

f(x_1)-f(x_2) =（x_1+）-（x_2+）=(x_1- x_2)·（1-）. $\frac{a}{x_1x_2}$

∴当 $0<x_2<x_1\leqslant$ 时，＞1，◆ $\sqrt{a}$

则 f（x_1）-f（x_2）＜0，即 f(x_1)＜ f(x_2)，故 f（x）在（0，］上是减函数.◆ $\frac{a}{x_1x_2}$ $\sqrt{a}$

当 $x_1>x_2\geqslant$ 时，0＜＜1，则 f（x_1）- f（x_2）＞0，即 f(x_1)＞f(x_2)，◆ $\frac{a}{x_1x_2}$

故 f（x）在［，+∞）上是增函数.∵f（x）是奇函数，◆ $\sqrt{a}$

∴f（x）分别在（-∞，-］、［，+∞）上 $\sqrt{a}$ 为增函数；◆

f（x）分别在［-，0）、（0，］上为减函 $\sqrt{a}$ 数.◆

方法二 由=1-=0 可得 x=± $f'(x)$ $\sqrt{a}$

当 x＞或 x＜-时，＞0∴f（x）分别在（，+∞）、（-∞，-］上是增函数.◆ $f'(x)$ $\sqrt{a}$

同理 0＜x＜或-＜x＜0 时，＜0◆ $f'(x)$ $\sqrt{a}$

即 f（x）分别在（0，］、［-，0）上是减 $\sqrt{a}$ 函数.

例 2. 判断函数 f(x)=在定义域上的单调 $\sqrt{x^2-1}$ 性.◆

解： 函数的定义域为{x|x≤-1 或 x≥1}，◆

则 f(x)= ，◆ $\sqrt{x^2-1}$

可分解成两个简单函数.◆

$\sqrt{u(x)}$，$u(x)$ f(x)= =x^2-1 的形式.当 x≥1 时，u(x)为增函数，为增函数.◆

∴f（x）=在［1，+∞)上为增函数.当 $\sqrt{x^2-1}$ x≤-1 时，u（x)为减函数，为减函数，◆

∴f(x)=在(-∞,-1]上为减函数.◆ $\sqrt{x^2-1}$

变式训练2：求函数y=（4x-x²）的单调 $\log_{\frac{1}{2}}$ 区间.◆

解： 由4x-x^2＞0，得函数的定义域是 $\log_{\frac{1}{2}}$ （0，4）.令t=4x-x^2，则y=t.◆

∵t=4x-x^2=-（x-2）^{2}+4，∴t=4x-x^2的单调减区间是［2，4），增区间是（0，2］.◆

又y=t在（0，+∞）上是减函数， $\log_{\frac{1}{2}}$

∴函数y=（4x-x^2）的单调减区间是 $\log_{\frac{1}{2}}$ （0，2］，单调增区间是［2，4).

例3. 求下列函数的最值与值域：◆

$\sqrt{x^2+1}$ $\sqrt{3+2x-x^2}$ $\frac{4}{x}$ $\sqrt{(2-x)^2+4}$ （1）y=4-; (2)y=x+;(3)y=.◆

解：（1）由3+2x-x^2≥0得函数定义域为［-1，3］，又t=3+2x-x^2=4-$(x-1)^2$.◆

∴t∈［0，4］，$\sqrt{t}$∈［0，2］，

从而，当x=1时，y_{min}=2，当x=-1或x=3时，y_{max}=4.故值域为［2，4］.◆

(2)方法一　函数y=x+$\frac{4}{x}$是定义域为{x| x≠0}上的奇函数,故其图象关于原点对称,故只讨论x＞0时,即可知x＜0时的最值.◆

∴当x＞0时,y=x+$\frac{4}{x}$≥2$\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}$=4，等号当且仅当x=2时取得.当x＜0时，y≤-4,◆

等号当且仅当x=-2时取得.综上函数的值域为（-∞，-4］∪［4，+∞），无最值.◆

方法二　任取x_1,x_2,且x_1＜x_2,◆

因为f(x_1)-f(x_2)=x_1+$\frac{4}{x_1}$-(x_2+$\frac{4}{x_2}$)=$\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-4)}{x_1x_2}$,◆

所以当x≤-2或x≥2时，f(x)递增,当-2＜x＜0或0＜x＜2时，f(x)递减.◆

故x=-2时，$f(x)_{最大值}$=f(-2)=-4,x=2时，$f(x)_{最小值}$=f(2)=4,◆

所以所求函数的值域为（-∞，-4］∪［4，+∞），无最大（小）值.◆

（3）将函数式变形为◆y=$\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0+2)^2}$,◆

可视为动点M（x,0）与定点A（0，1）、B（2，-2）距离之和，连结AB，则直线AB与x轴的交点（横坐标）即为所求的最小值点.◆

y_{min}=|AB|=$\sqrt{(0-2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{13}$，可求得x=$\frac{2}{3}$时，$y_{min}$=$\sqrt{13}$.◆

显然无最大值.故值域为［$\sqrt{13}$，+∞）.◆

变式训练3：在经济学中，函数f(x)的边际函数Mf(x)定义为Mf（x）=f（x+1）-f（x）.某公司每月最多生产100台报警系统装置，生产x（x＞0）台的收入函数为R（x）=3 000x-20x^2（单位：元），其成本函数为C（x）=500x+4 000（单位：元），利润是收入与成本之差.◆

（1）求利润函数P（x）及边际利润函数MP（x）；◆

（2）利润函数P（x）与边际利润函数MP（x）是否具有相同的最大值？◆

解：（1）P（x）=R（x）-C（x）=（3 000x-20x^2）-（500x+4 000）=-20x^2+2 500x-4 000

（x∈［1，100］且x∈N,）

MP（x）=P（x+1）-P（x）=-20（x+1）^{2}+2 500（x+1）-4 000-（-20x^2+2 500x-4 000）

=2 480-40x （x∈［1，100］且x∈N）.◆

（2）P（x）=-20$(x-\frac{125}{2})^2$+74 125，当x=62或63时，$P(x)_{max}$=74 120（元）.◆

因为MP（x）=2 480-40x是减函数，所以当x=1时，$MP(x)_{max}$=2 440(元）.◆

因此，利润函数P（x）与边际利润函数MP（x）不具有相同的最大值.◆

例4. （2009·广西河池模拟）已知定义在区间（0，+∞）上的函数f(x)满足f($\frac{x_1}{x_2}$)=f(x_1)-f(x_2)，且当x＞1时，f(x)＜0.

（1）求 f(1)的值；◆

（2）判断 f(x) 的单调性；◆

（3）若 f(3)=-1,解不等式 f(|x|)<-2.◆

解：（1）令 $x_1=x_2$>0,代入得 $f(1)=f(x_1)-f(x_1)=0$,故 f(1)=0.◆

（2）任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1>x_2$,则$\frac{x_1}{x_2}$>1,由于当 x>1 时，f(x)<0,◆

所以 $f(\frac{x_1}{x_2})$<0,即 $f(x_1)-f(x_2)<0$,因此 $f(x_1)<f(x_2)$,◆

所以函数 f(x)在区间(0,+∞)上是单调递减函数.◆

（3）由 $f(\frac{x_1}{x_2})=f(x_1)-f(x_2)$ 得 $f(\frac{9}{3})=f(9)-f(3)$,而 f(3)=-1,所以 f(9)=-2.◆

由于函数 f(x)在区间（0,+∞）上是单调递减函数，◆

由 f(|x|)<f(9),得|x|>9,∴x>9 或 x<-9.因此不等式的解集为{x|x>9 或 x<-9}.

变式训练 4：函数 f(x)对任意的 a、b∈R,都有 f(a+b)=f(a)+f(b)-1,并且当 x>0 时，f(x)>1.◆

（1）求证：f(x)是 R 上的增函数；◆

（2）若 f(4)=5,解不等式 $f(3m^2-m-2)<3$.◆

解：（1）设 $x_1,x_2\in R$，且 $x_1<x_2$,◆

则 $x_2-x_1>0$,∴$f(x_2-x_1)>1$.

$f(x_2)-f(x_1)=f((x_2-x_1)+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+f(x_1)-1-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1>0$.

∴$f(x_2)>f(x_1)$.◆

即 f(x)是 R 上的增函数.

（2）∵f（4）=f（2+2）=f（2）+f（2）-1=5，◆

∴f（2）=3，

∴原不等式可化为 $f(3m^2-m-2)<f(2)$,◆

∵f(x)是 R 上的增函数，∴$3m^2-m-2<2$,

解得-1<m<$\frac{4}{3}$,故解集为（-1,$\frac{4}{3}$）.

小结归纳

函数在区间 D 上是增(减)函数的方法有：(1) 定义法.其过程是：作差——变形——判断符号，而最常用的变形是将和、差形式的结构变为积的形式的结构；(2) 求导法.其过程是：求导——判断导函数的符号——下结论.

2．确定函数单调区间的常用方法有：(1)观察法；(2)图象法（即通过画出函数图象，观察图象，确定单调区间）；(3)定义法；(4)求导法.注意：单调区间一定要在定义域内.

3．含有参量的函数的单调性问题，可分为两类：一类是由参数的范围判定其单调性；一类是给定单调性求参数范围，其解法是由定义或导数法得到恒成立的不等式，结合定义域求出参数的取值范围.

第 4 课时　　函数的奇偶性

基础过关

1．奇偶性：

① 定义：如果对于函数 $f(x)$定义域内的任意 x 都有____________，则称 $f(x)$为奇函数；若_____________，则称 $f(x)$为偶函数．如果函数 $f(x)$不具有上述性质，则 $f(x)$不具有．如果函数同时具有上述两条性质，则 $f(x)$____________________________.

② 简单性质：

1） 图象的对称性质：一个函数是奇函数的充要条件是它的图象关于________对称；一个函数是偶函数的充要条件是它的图象关于________对称.

2） 函数 $f(x)$具有奇偶性的必要条件是其定义域关于__________对称.

2． 与函数周期有关的结论：

① 已知条件中如果出现、或（、均 $f(x+a)$ $f(x)$
为非零常数，），都可以得出的周期为________；
② 的图象关于点中心对称或的图象 $(x, 0)$
关于直线轴对称，均可以得到周期________________

典型例题

例 1. 判断下列函数的奇偶性.◆

（1）f(x)=$\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{1-x^2}$;◆

(2)f(x)=$\log_2$(x+$\sqrt{x^2+1}$) (x∈R);◆

(3)f(x)=lg|x-2|.◆

解：（1）∵$x^2-1\geqslant0$ 且 $1-x^2\geqslant0$，∴x=±1，即f(x)的定义域是{-1，1}.◆

∵f（1）=0，f(-1)=0，∴f(1)=f(-1)，f(-1)=-f(1)，◆

故f(x)既是奇函数又是偶函数.◆

（2）方法一 易知f(x)的定义域为R，◆

又∵f(-x)=$\log_2$［-x+$\sqrt{(-x)^2+1}$］=$\log_2\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$=-$\log_2$(x+$\sqrt{x^2+1}$)=-f(x)，◆

∴f(x)是奇函数.◆

方法二 易知f(x)的定义域为R，◆

又∵f（-x）+f（x）=$\log_2$［-x+$\sqrt{(-x)^2+1}$］+$\log_2$(x+$\sqrt{x^2+1}$)=$\log_2 1$=0，即f(-x)=-f(x)，◆

∴f(x)为奇函数.◆

（3）由|x-2|＞0，得x≠2.◆

∴f（x）的定义域{x|x≠2}关于原点不对称，故f(x)为非奇非偶函数.◆

变式训练 1：判断下列各函数的奇偶性：◆

（1）f（x）=（x-2）$\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$；◆

（2）f（x）=$\frac{\lg(1-x^2)}{|x^2-2|-2}$；◆

（3）f（x）=$\begin{cases}x+2 & (x<-1),\\ 0 & (|x|\le 1),\\ -x+2 & (x>1).\end{cases}$

解：（1）由$\frac{2+x}{2-x}$≥0，得定义域为［-2，2），关于原点不对称，故f（x）为非奇非偶函数.◆

（2）由$\begin{cases}1-x^2>0,\\ |x^2-2|-2\neq 0.\end{cases}$得定义域为（-1，0）∪（0，1）.◆

这时f（x）=$\frac{\lg(1-x^2)}{-(x^2-2)-2}=-\frac{\lg(1-x^2)}{x^2}$.◆

∵f（-x）=$-\frac{\lg[1-(-x)^2]}{(-x)^2}=-\frac{\lg(1-x^2)}{x^2}=f(x)$，

∴f（x）为偶函数.◆

（3）x＜-1时，f（x）=x+2，-x＞1，∴f（-x）=-（-x）+2=x+2=f（x）.◆

x＞1时，f（x）=-x+2，-x＜-1，f(-x)=x+2=f(x).◆

-1≤x≤1时，f（x）=0，-1≤-x≤1，f（-x）=0=f（x）.◆

∴对定义域内的每个x都有f（-x）=f（x）.因此f（x）是偶函数.◆

例 2 已知函数f(x)，当x，y∈R时，恒有f(x+y)=f(x)+f(y).◆

（1）求证：f(x)是奇函数；◆

（2）如果x∈R^+，f（x）＜0，并且f(1)=-$\frac{1}{2}$，试求f(x)在区间［-2，6］上的最值.◆

（1）**证明：** ∵函数定义域为R，其定义域关于原点对称.◆

∵f（x+y）=f（x）+f（y），令y=-x，∴f(0)=f(x)+f(-x).令x=y=0，◆

∴f(0)=f(0)+f(0),得 f(0)=0. ∴f（x）+f（-x）=0，得 f(-x)=-f(x),◆
∴f(x)为奇函数.◆
（2）**解**：方法一　设 x,y∈R^+，∵f（x+y）=f（x）+f（y），◆
∴f（x+y）-f（x）=f（y）.◆∵x∈R^+，f（x）<0,◆
∴f(x+y)-f(x)<0,◆∴f(x+y)<f(x).◆
∵x+y>x,◆∴f(x)在（0，+∞）上是减函数.又∵f（x）为奇函数，f（0）=0，◆
∴f（x）在（-∞,+∞）上是减函数.∴f（-2）为最大值，f(6)为最小值.◆
∵f(1)=-,∴f(-2)=-f(2)=- $\frac{1}{2}$ 2f(1)=1,f(6)=2f(3)=2［f（1）+f（2）］=-3.◆
∴所求 f(x)在区间［-2，6］上的最大值为 1，最小值为-3.◆
方法二　设 $x_1<x_2$,且 $x_1,x_2\in R$.◆
则 $f(x_2-x_1)=f[x_2+(-x_1)]=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2)-f(x_1)$.◆
∵$x_2-x_1>0$,∴$f(x_2-x_1)<0$.∴$f(x_2)-f(x_1)<0$.即 f(x)在 R 上单调递减.◆
∴f（-2）为最大值，f（6）为最小值.∵f（1）=- $\frac{1}{2}$，◆
∴f（-2）=-f（2）=-
2f（1）=1，f（6）=2f（3）=2［f（1）+f（2）］=-3.◆
∴所求 f(x)在区间［-2，6］上的最大值为 1，最小值为-3.◆

变式训练 2：已知 f(x)是 R 上的奇函数，且当 x∈(-∞,0)时，f(x)=-xlg(2-x),求 f(x)的解析式.◆
解：∵f（x）是奇函数，可得 f(0)=-f(0),∴f(0)=0.◆
当 x>0 时，-x<0,由已知 f(-x)=xlg(2+x),∴-f（x）=xlg（2+x），◆
即 f（x）=-xlg(2+x)　（x>0）. ∴f(x)=
$$\begin{cases} -x\lg(2-x) & (x<0), \\ -x\lg(2+x) & (x\ge 0). \end{cases}$$
即 f(x)=-xlg(2+|x|) (x∈R).

例 3　已知函数 f(x)的定义域为 R，且满足 f(x+2)=-f(x)○.◆
（1）求证：f(x)是周期函数；◆
（2）若 f(x)为奇函数，且当 0≤x≤1 时，f(x)= $\frac{1}{2}$x,求使 f(x)=- $\frac{1}{2}$ 在［0，2 009］上的所有 x 的个数.◆
（1）**证明**：∵f（x+2）=-f（x），◆
∴f（x+4）=-f（x+2）=-［-f（x）］=f（x），
∴f（x）是以 4 为周期的周期函数.
（2）**解**：当 0≤x≤1 时，f(x)= $\frac{1}{2}$x,◆
设-1≤x≤0,则 0≤-x≤1,∴f（-x）=（- $\frac{1}{2}$x）=- $\frac{1}{2}$x.◆
∵f(x)是奇函数，∴f（-x）=-f（x），◆
∴-f（x）=- $\frac{1}{2}$x，即 f(x)= $\frac{1}{2}$x.
故 f(x)= $\frac{1}{2}$x(-1≤x≤1)
又设 1<x<3,则-1<x-2<1,◆
∴f(x-2)= $\frac{1}{2}$(x-2),
又∵f（x-2）=-f（2-x）=-f（（-x）+2）=-［-f（-x）］=-f（x），◆
∴-f（x）= $\frac{1}{2}$（x-2），◆
∴f（x）=- $\frac{1}{2}$（x-2）（1<x<3）.
∴f（x）=
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x & (-1\le x\le 1) \\ -\frac{1}{2}(x-2) & (1<x<3) \end{cases}$$
由 f(x)=- $\frac{1}{2}$,解得 x=-1.◆
∵f（x）是以 4 为周期的周期函数.◆故 f(x)=- $\frac{1}{2}$ 的所有 x=4n-1（n∈Z).

令0≤4n-1≤2 009,则≤n≤,◆ $\frac{1}{4}$ $\frac{1005}{2}$
又∵n∈Z，∴1≤n≤502 （n∈Z）,◆
∴在[0，2 009]上共有502个x使 $\frac{1}{2}$ f(x)=-.

变式训练3： 已知函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1$,a∈R.◆
（1）试判断f(x)的奇偶性；◆
（2）若-≤a≤，求f(x)的最小值. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

解：(1)当a=0时，函数 $f(-x)=(-x)^2+|-x|+1=f(x)$,◆
此时,f(x)为偶函数.当a≠0时，$f(a)=a^2+1$, $f(-a)=a^2+2|a|+1$,◆
f(a)≠f(-a),f(a)≠-f(-a),此时，f(x) 为非奇非偶函数.◆
（2）当x≤a时，$f(x)=x^2-x+a+1=(x-)^2+a+$,◆ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$
∵a≤,故函数f(x)在（-∞，a]上单调递减，◆ $\frac{1}{2}$
从而函数f(x)在（-∞，a]上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.◆
当x≥a时，函数 $f(x)=x^2+x-a+1=(x+)^2-a+$,◆ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$
∵a≥-，故函数f(x)在[a，+∞）上单调递增，从而函数f(x)在[a，+∞)上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.◆ $\frac{1}{2}$
综上得，当-≤a≤时，函数f(x)的最小值为 a^2+1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

小结归纳

1．奇偶性是某些函数具有的一种重要性质，对一个函数首先应判断它是否具有这种性质. 判断函数的奇偶性应首先检验函数的定义域是否关于原点对称，然后根据奇偶性的定义判断（或证明）函数是否具有奇偶性. 如果要证明一个函数不具有奇偶性，可以在定义域内找到一对非零实数 a 与 $-a$，验证 $f(a)\pm f(-a)\neq 0$.
2．对于具有奇偶性的函数的性质的研究，我们可以重点研究 y 轴一侧的性质，再根据其对称性得到整个定义域上的性质.
3．函数的周期性：第一应从定义入手，第二应结合图象理解.

第5课时　　指数函数

基础过关

1．根式：

(1) 定义：若，则称为的次方根 $x^n=a$ x a的n
① 当为奇数时，次方根记作__________； n
② 当为偶数时，负数没有次方根，而正数有两个次方根且互为相反数，记作________ (a>0). n

(2) 性质：
①； $(\sqrt[n]{a})^n=a$
② 当为奇数时，； $\sqrt[n]{a^n}=a$
③ 当为偶数时，_______＝ $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a(a\ge 0)\\ -a(a<0)\end{cases}$

2．指数：

(1) 规定：
① a^0＝_______(a≠0)；
② a^{-p}＝________；
③ ________. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m$

(2) 运算性质：
① _____(a>0, r、**Q**) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r$ $s\in$
② _____(a>0, r、**Q**) $(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r$ $s\in$

③ ______(a>0, r、Q) $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r (a>0, b>0, r \in$ $S \in$ $S \in$

注：上述性质对 r、R 均适用.

3．指数函数：

① 定义：函数__________________称为指数函数，1) 函数的定义域为_____；2) 函数的值域为______；3) 当________时函数为减函数，当_______时为增函数.

② 函数图像：

1) 过点___________，图象在 $y = a^x, y = a^{-x}$ $0 < a < 1$

；2) 指数函数以______为渐近线(当时，图象向____无限接近轴，当时，图象向____无限接近 x 轴)；3)函数的图象关于_______对称.

③ 函数值的变化特征：

$0<a<1$	$a>1$
① $x>0$时 ② $x=0$时 ③ $x<0$时	① $x>0$时 ② $x=0$时 ③ $x<0$时

典型例题

例 1. 已知 a=, b=9. 求：$\sqrt[3]{a^{\frac{7}{2}}\sqrt{a^{-3}}} \div \sqrt[3]{\sqrt{a^{-8}}} \cdot \sqrt[3]{a^{15}}$；$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}}$

（1）　　（2）.

解：（1）原式=. ÷［a·］◆= =a. ◆

∵a=，∴原式=3. ◆ $\frac{1}{9}$

（2）**方法一**　化去负指数后解. ◆

$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}} = \frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{1}{ab}} = a+b.$$

∵a=∴a+b= $\frac{1}{9}, b=9, \frac{82}{9}$

方法二　利用运算性质解. ◆

$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}} = \frac{a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}} + \frac{b^{-1}}{a^{-1}b^{-1}} = \frac{1}{b^{-1}} + \frac{1}{a^{-1}} = b+a.$$

$\frac{1}{9}, b=9, \frac{82}{9}$，∵a=∴a+b=

变式训练 1：化简下列各式（其中各字母均为正数）：

（1）$\frac{(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-1})^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{a \cdot b^5}}$；

（2）$\frac{5}{6}a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-2} \cdot (-3a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}) \div (4a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-3})^{\frac{1}{2}}.$

解：

（1）原式= $\frac{a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}} = a^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}} = a^0 \cdot b^0 = 1.$

$$\frac{5}{2}a^{-\frac{1}{6}}b^{-3} \div (2a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{5}{4}a^{-\frac{1}{6}}b^{-3} \div (a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{5}{4}a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{3}{2}} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab^3}} = -\frac{5\sqrt{ab}}{4ab^2}.$$

（2）原式=-

例 2. 函数 f(x)=x²-bx+c 满足 f(1+x)=f(1-x)且 f(0)=3, 则 f(bˣ)与 f(cˣ)的大小关系是　（　　）

A. f(bˣ)≤f(cˣ)■　　　　B. f(bˣ)≥f(cˣ)

C. f(bˣ)＞f(cˣ)　　　　D. 大小关系随 x 的不同而不同

解：A

$(\frac{1}{2})^a=(\frac{1}{3})^b$ **变式训练2**：已知实数a、b满足等式，下列五个关系式：◆① 0＜b＜a;②a＜b＜0;③0＜a＜b;④b＜a＜0;⑤a=b.◆其中不可能成立的关系式有 （ ）

A.1个 ■ B.2个 ■C.3个 ■D.4个◆

解：B■◆

例3. 求下列函数的定义域、值域及其单调区间：◆

$\frac{1}{4})^x+4(\frac{1}{2})^x+5$ $\sqrt{x^2-5x+4}$ （1）f(x)=3;◆（2）g(x)=-(.

解：（1）依题意$x^2-5x+4\geqslant0$,◆解得x≥4或x≤1,◆

∴f（x）的定义域是（-∞，1］∪［4，+∞）.◆

$\sqrt{x^2-5x+4}=\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}}$, 令u=∵x∈（-∞，1］∪［4，+∞），◆

∴u≥0，即≥0，而$f(x)=3\geqslant3^0=1$,◆ $\sqrt{x^2-5x+4}$

∴函数f(x)的值域是［1，+∞）.◆

∵u=,∴当x∈（-∞，1］时，u是减函数，◆ $\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}}$

当x∈［4，+∞）时，u是增函数.而3＞1,∴由复合函数的单调性可知，◆

f（x）=3在（-∞，1］上是减函数， $\sqrt{x^2-5x+4}$

在［4，+∞）上是增函数.◆

故f（x）的增区间是［4，+∞），减区间是（-∞，1］.◆

（2）由g(x)=-(◆ $\frac{1}{4})^x+4(\frac{1}{2})^x+5=-(\frac{1}{2})^{2x}+4(\frac{1}{2})^x+5$,

∴函数的定义域为R，令 $\frac{1}{2})$

t=(x （t＞0),∴$g(t)=-t^2+4t+5=-(t-2)^2+9$,◆

∵t＞0,∴$g(t)=-(t-2)^2+9\leqslant9$,等号成立的条件是t=2,◆

即g(x)≤9,等号成立的条件是(=2，即 $\frac{1}{2})^x$ x=-1，∴g（x）的值域是（-∞，9］.◆

由$g(t)=-(t-2)^2+9$（t＞0),而t=(是减函数，∴要求g(x)的增区间实际上是求g(t)的减区间，◆求g(x)的减区间实际上是求g(t)的增区间.◆ $\frac{1}{2})^x$

∵g（t）在（0，2］上递增，在［2，+∞）上递减，◆

由0＜t=(≤2,可得x≥-1,◆由t=(≥2, $\frac{1}{2})^x$ 可得x≤-1.◆

∴g（x）在［-1，+∞）上递减，在（-∞，-1］上递增，◆

故g(x)的单调递增区间是（-∞，-1］，单调递减区间是［-1，+∞）.◆

变式训练3：求下列函数的单调递增区间：◆（1）y=(;(2)y=2.◆ $\frac{1}{2})^{6+x-2x^2}$ x^2-x-6

解：（1）函数的定义域为R.◆

令$u=6+x-2x^2$,则y=(.◆ $\frac{1}{2})^u$

∵二次函数$u=6+x-2x^2$的对称轴为x=,◆ $\frac{1}{4}$

在区间［，+∞）上，$u=6+x-2x^2$是减函数，◆ $\frac{1}{4}$

又函数y=(u是减函数，◆ $\frac{1}{2})$

∴函数y=(在［，+∞）上是增函数.◆ $\frac{1}{2})^{6+x-2x^2}$ $\frac{1}{4}$

故y=(单调递增区间为［，+∞）.◆ $\frac{1}{2})^{6+x-2x^2}$ $\frac{1}{4}$

（2）令$u=x^2-x-6$,则$y=2^u$,◆

∵二次函数$u=x^2-x-6$的对称轴是x=, $\frac{1}{2}$

在区间［，+∞）上$u=x^2-x-6$是增函数.◆ $\frac{1}{2}$

又函数 y=2^{u}为增函数，◆

∴函数 y=2 在区间［，+∞）上是增函数. x^2-x-6 ◆ $\frac{1}{2}$

故函数 y=2 的单调递增区间是［，+∞）. x^2-x-6 $\frac{1}{2}$

例 4． 设 a＞0, f(x)=是 R 上的偶函数.◆ $\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$

（1）求 a 的值；◆

（2）求证：f(x)在（0，+∞）上是增函数.◆

（1）**解：** ∵f（x）是 R 上的偶函数，∴f（-x）=f（x），◆∴ $\frac{e^{-x}}{a}+\frac{a}{e^{-x}}=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$,

∴（a-=0 对一切 x 均成立，◆ $(\frac{1}{a})(e^x-\frac{1}{e^x})$

∴a-=0，而 a＞0, ∴a=1. $\frac{1}{a}$

（2）**证明** 在（0，+∞)上任取 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=$ +-- e^{x_1} e^{x_2} $\frac{1}{e^{x_1}}$ $\frac{1}{e^{x_2}}$

= ($(e^{x_2}-e^{x_1})(\frac{1}{e^{x_1+x_2}}-1)$.

∵$x_1<x_2$, ∴有○◆ $e^{x_2}-e^{x_1}>0$.

∵$x_1>0$, $x_2>0$, ∴$x_1+x_2>0$, ∴>1, $e^{x_1+x_2}$

-1＜0. ∴$f(x_1)-f(x_2)<0$, 即 $f(x_1)<f(x_2)$, $\frac{1}{e^{x_1+x_2}}$

故 f(x)在（0,+∞）上是增函数.

变式训练 4： 已知定义在 R 上的奇函数 f(x)有最小正周期 2，且当 x∈(0,1)时，f(x)=. $\frac{2^x}{4^x+1}$

（1）求 f（x)在［-1，1］上的解析式；◆

（2）证明：f(x)在（0，1）上是减函数.◆

（1）**解：** 当 x∈(-1,0)时，-x∈(0,1).◆

∵f（x）是奇函数，∴f（x）=-f（-x）=- $\frac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=-\frac{2^x}{4^x+1}$.

由 f(0)=f(-0)=-f(0)，且 f(1)=-f(-1)=-f(-1+2)=-f(1),◆

得 f(0)=f(1)=f(-1)=0. ∴在区间［-1，1］上，有◆f（x）=

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2^x}{4^x+1} & x\in(0,1)\\ -\frac{2^x}{4^x+1} & x\in(-1,0)\\ 0 & x\in\{-1,0,1\}\end{cases}$$

(2)**证明** 当 x∈(0,1)时，f(x)= $\frac{2^x}{4^x+1}$.

设 $0<x_1<x_2<1$,◆

则 $f(x_1)-f(x_2)=$ $\frac{2^{x_1}}{4^{x_1}+1}-\frac{2^{x_2}}{4^{x_2}+1}=\frac{(2^{x_2}-2^{x_1})(2^{x_1+x_2}-1)}{(4^{x_1}+1)(4^{x_2}+1)}$,

∵$0<x_1<x_2<1$, ∴$2^{x_2}-2^{x_1}>0$，$2^{x_1+x_2}-1>0$, ∴$f(x_1)-f(x_2)>0$, 即 $f(x_1)>f(x_2)$,◆

故 f(x)在（0，1）上单调递减.

小结归纳

1．$\sqrt[b]{N}=a$，$a^b=N$，$\log_a N=b$(其中 N>0，a>0，a≠1)是同一数量关系的三种不同表示形式，因此在许多问题中需要熟练进行它们之间的相互转化，选择最好的形式进行运算.在运算中，根式常常化为指数式比较方便，而对数式一般应化为同底.

2．处理指数函数的有关问题，要紧密联系函数图象，运用数形结合的思想进行求解.

3．含有参数的指数函数的讨论问题是重点题型，解决这类问题最基本的分类方案是以“底”大于 1 或小于 1 分类.

4．含有指数的较复杂的函数问题大多数都以综合形式出现，与其它函数(特别是二次函数)形成的函数问题，与方程、不等式、数列等内容形成的各类综合问题等等，因此要注意知识的相互渗透或综合．

第6课时　　对数函数

基础过关

1．对数：

(1) 定义：如果，那么称________为 $(a>0, a\neq 1)$ $a^x=N$

，记作__________，其中称为对数的底，N称为真数．

① 以10为底的对数称为常用对数，记作 $\log_{10}N$ ___________．

② 以无理数为底的对数称为自然 $e(e=2.71828\cdots)$ $\log_e N$

对数，记作_________．

(2) 基本性质：

① 真数N为_______(负数和零无对数)；$\log_a 1=0$ $\log_a a=1$

② _____；③ ______；

④ 对数恒等式：________．　　$a^{\log_a N}=N$

(3) 运算性质：

① $\log_a(MN)=$___________________________；

② $\log_a$ $\dfrac{M}{N}=$ ______________________________；

③ $\log_a M^n=$____________($n\in R$)．

④ 换底公式：$\log_a N=$__________($a>0$，$a\neq 1$，$m>0$，$m\neq 1$，$N>0$)

⑤ __________．　　$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$.

2．对数函数：

① 定义：函数_____________________称为对数函数，1) 函数的定义域为(_____；2) 函数的值域为_____；3) 当______时，函数为减函数，当______时为增函数；

4) 函数与函数________互为反函 $y=a^x(a>0, 且a\neq 1)$ $y=\log_a x$

数．

② 1) 图象经过点(________)，图象在 $0<a<1$ $a>1$；2) 对数函数以______为渐近线(当时，图象向上无限接近 y 轴；当时，图象向下无限接近 y 轴)；

4) 函数 $y=\log_a x$ 与________的图象关于 x 轴对称．

③ 函数值的变化特征：

$0<a<1$	$a>1$
① $x>1$时 ② $x=1$时 ③ $0<x<1$时	$x>1$时 ① $x=1$时 ② _______ $0<x<1$时 ③ _______

典型例题

例1　计算：(1) $\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$

(2) $2(\lg\sqrt{2})^2+\lg\sqrt{2}\cdot\lg5+\sqrt{(\lg\sqrt{2})^2-\lg 2+1}$；◆

(3) $\frac{1}{2}\lg\frac{32}{49}-\frac{4}{3}\lg\sqrt{8}+\lg\sqrt{245}$．◆◆

解：(1) 方法一　利用对数定义求值◆

设 $\log_{2+\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$=x，◆则 $(2+\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$=$(2+\sqrt{3})^{-1}$，∴x=-1．◆

方法二　利用对数的运算性质求解◆

$\log_{2+\sqrt3}(2-\sqrt3)=\log_{2+\sqrt3}\frac{1}{2+\sqrt3}$ = =(2+)$^{-1}$=-1.◆

（2）原式 $\sqrt{(\lg\sqrt2)^2-2\lg\sqrt2+1}$

=lg（2lg+lg5）+=lg(lg2+lg5)+|lg-1|◆

=lg+(1-lg)=1.◆ $\sqrt2$

（3）原式=（lg32-lg49）-lg8+lg245◆

= (5lg2-2lg7)-×+ (2lg7+lg5)◆ $\frac12$ $\frac43$ $\frac32\lg2$ $\frac12$

=lg2-lg7-2lg2+lg7+lg5=lg2+lg5◆ $\frac12$ $\frac12$

=lg(2×5)= lg10=.■◆ $\frac12$

变式训练 1：化简求值.◆

（1）$\log_2$+$\log_2$12-$\log_2$42-1;◆ $\sqrt{\frac{7}{48}}$

（2）$(\lg2)^2$+lg2・lg50+lg25;◆

（3）($\log_3$2+$\log_9$2)・($\log_4$3+$\log_8$3).◆

解：（1）原式=$\log_2$+$\log_2$12-$\log_2$-$\log_2$2=$\log_2$◆

$$\frac{\sqrt7\times12}{\sqrt{48}\times\sqrt{42}\times2}=\log_2\frac{1}{2\sqrt2}=\log_2 2^{-\frac32}=-\frac32.$$

（2）原式=lg2(lg2+lg50)+lg25=2lg2+lg25=lg100=2.◆

（3）原式=(

$$\left(\frac{\lg2}{\lg3}+\frac{\lg2}{2\lg3}\right)\cdot\left(\frac{\lg3}{2\lg2}+\frac{\lg3}{3\lg2}\right)=\frac{3\lg2}{2\lg3}\cdot\frac{5\lg3}{6\lg2}=\frac54.$$

例 2　比较下列各组数的大小.◆

（1）$\log_3$与$\log_5$;◆（2）$\log_{1.1}0.7$与$\log_{1.2}0.7$;◆ $\frac23$ $\frac35$

（3）已知logb＜loga＜logc,比较$2^b,2^a,2^c$的大小关系.◆ $\frac12$ $\frac12$ $\frac12$

解：（1）∵$\log_3$＜$\log_3$1=0,◆而$\log_5$＞$\log_5$1=0,∴$\log_3$＜$\log_5$.◆ $\frac23$ $\frac35$ $\frac23$ $\frac35$

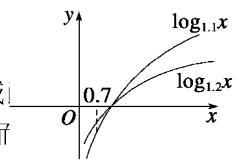
(2)方法一　∵0＜0.7＜1,1.1＜1.2,◆∴0＞,◆ $\log_{0.7}1.1>\log_{0.7}1.2$

∴,◆ $\frac{1}{\log_{0.7}1.1}<\frac{1}{\log_{0.7}1.2}$

即由换底公式可得$\log_{1.1}0.7$＜$\log_{1.2}0.7$.◆

方法二　作出y=$\log_{1.1}$x与y=$\log_{1.2}$x的图象.◆

如图所示两图象与x=0.7相交可知$\log_{1.1}0.7$＜$\log_{1.2}0.7$.◆



(3)∵y=为减函数，且 $\log_{\frac12}b<\log_{\frac12}a<\log_{\frac12}c$，

∴b＞a＞c,而y=2^x是增函数，∴2^b＞2^a＞2^c.◆

变式训练 2：已知0＜a＜1,b＞1,ab＞1，则$\log_a$的大小关系是　　　（　）$\frac1b,\log_a b,\log_b\frac1b$

A.$\log_a$ $\log_a b<\log_a\frac1b<\log_b\frac1b$

B.

C.

$\log_b\frac1b<\log_a\frac1b<\log_a b$

D.

解：　C

例 3 已知函数f(x)=$\log_a$x(a＞0,a≠1)，如果对于任意x∈［3，+∞）都有|f(x)|≥1成立，试求a的取值范围.◆

解：当a＞1时，对于任意x∈［3，+∞），都有f(x)＞0.◆

所以，|f(x)|=f(x),而f(x)=$\log_a$x在［3，+∞）上为增函数，

∴对于任意x∈［3，+∞），有f(x)≥$\log_a$3.

因此，要使$|f(x)|\geqslant 1$对于任意$x\in[3,+\infty)$都成立.◆

只要$\log_a 3\geqslant 1=\log_a a$即可，∴$1<a\leqslant 3$.

当$0<a<1$时，对于$x\in[3,+\infty)$，有$f(x)<0$,◆

∴$|f(x)|=-f(x)$.

∵$f(x)=\log_a x$在$[3,+\infty)$上为减函数，◆

∴$-f(x)$在$[3,+\infty)$上为增函数.◆

∴对于任意$x\in[3,+\infty)$都有◆

$|f(x)|=-f(x)\geqslant -\log_a 3$.

因此，要使$|f(x)|\geqslant 1$对于任意$x\in[3,+\infty)$都成立，◆

只要$-\log_a 3\geqslant 1$成立即可，◆

∴$\log_a 3\leqslant -1=\log_a$, 即≤3, ∴≤a<1.◆ $\frac{1}{3}$

综上，使$|f(x)|\geqslant 1$对任意$x\in[3,+\infty)$ $\frac{1}{3}$ 都成立的a的取值范围是：(1，3]∪[，1).

变式训练3： 已知函数$f(x)=\log_2(x^2-ax-$ $\sqrt{3}$ $a)$在区间$(-\infty,$ ●$1-]$上是单调递减函数.求实数a的取值范围.◆

解： 令$g(x)=x^2-ax-a$,

则$g(x)=(x-)^2-a-$,◆由以上知g(x)的图 $\frac{a}{2}$ $\frac{a^2}{4}$ 象关于直线x=对称且此抛物线开口向上.◆

因为函数$f(x)=\log_2 g(x)$的底数2>1,◆

在区间$(-\infty,1-]$上是减函数，◆ $\sqrt{3}$

所以$g(x)=x^2-ax-a$在区间$(-\infty,1-]$上也 $\sqrt{3}$ 是单调减函数，且$g(x)>0$.◆

∴

$$\begin{cases}1-\sqrt{3}\leq\frac{a}{2}\\ g(1-\sqrt{3})>0\end{cases}，即\begin{cases}a\geq 2-2\sqrt{3}\\ (1-\sqrt{3})^2-a(1-\sqrt{3})-a>0\end{cases}$$

解得$2-2\leqslant a<2$.◆ $\sqrt{3}$

故a的取值范围是$\{a|2-2\leqslant a<2\}$. $\sqrt{3}$

例4 已知过原点O的一条直线与函数$y=\log_8 x$的图象交于A、B两点，分别过A、B作y轴的平行与函数$y=\log_2 x$的图象交于C、D两点.◆

(1)证明:点C、D和原点O在同一直线上；◆

(2)当BC平行于x轴时，求点A的坐标.◆

(1)**证明** 设点A、B的横坐标分别为x_1、x_2,◆

由题设知$x_1>1,x_2>1$,则点A、B的纵坐标分别为$\log_8 x_1$、$\log_8 x_2$.◆

$\frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}$ 因为A、B在过点O的直线上，所以点C、D的坐标分别为$(x_1,\log_2 x_1)$、$(x_2,\log_2 x_2)$,◆

由 于 $\log_8 x_1$ $\log_2 x_1==3\log_8 x_1,\log_2 x_2=3\log_8 x_2$,◆

$\frac{\log_2 x_1}{x_1}=\frac{3\log_8 x_1}{x_1}$ OC的斜率为$k_1=$,◆

OD的斜率为由此可知 $k_2=\frac{\log_2 x_2}{x_2}=\frac{3\log_8 x_2}{x_2}$, $k_1=k_2$,即O、C、D在同一直线上.◆

(2)**解：** 由于BC平行于x轴，知 $\frac{1}{3}$ $\log_2 x_1=\log_8 x_2$，即得$\log_2 x_1=\log_2 x_2,x_2=x^3_1$,◆

代入$x_2\log_8 x_1=x_1\log_8 x_2$，得$x^3_1\log_8 x_1=3x_1\log_8 x_1$,由于$x_1>1$,知$\log_8 x_1\neq 0$,故$x^3_1=3x_1$,◆

又因$x_1>1$,解得$x_1=$,于是点A的坐标为(,$\sqrt{3}$ $\log_8$).

变式训练4： 已知函数 $\frac{x+1}{x-1}$ $f(x)=\log_2+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)$.◆

（1）求 f(x)的定义域；◆　　（2）求 f(x)的值域.◆

解：（1）f(x)有意义时，有◆

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}>0 & ①,\\ x-1>0 & ②,\\ p-x>0 & ③,\end{cases}$$

由①、②得 x＞1，由③得 x＜p，因为函数的定义域为非空数集，故 p＞1，f(x)的定义域是(1, p).

（2）f(x)=$\log_2$［(x+1)(p−x)］◆

=$\log_2$［−（x−$\frac{p-1}{2}$）^{2}+$\frac{(p+1)^2}{4}$］（1＜x＜p），◆

① 当 1＜$\frac{p-1}{2}$＜p，即 p＞3 时，◆

0＜−(x−$\frac{p-1}{2}$)^2+$\frac{(p+1)^2}{4}$ ≤ $\frac{(p+1)^2}{4}$，◆

∴$\log_2\left[-(x-\frac{p-1}{2})^2+\frac{(p+1)^2}{4}\right]$≤2$\log_2$(p+1)−2.◆

② 当$\frac{p-1}{2}$≤1，即 1＜p≤3 时，◆

∵0＜−(x−$\frac{p-1}{2}$)^2+$\frac{(p+1)^2}{4}$ ＜ 2(p−1)，

∴$\log_2\left[-(x-\frac{p-1}{2})^2+\frac{(p+1)^2}{4}\right]$＜1+$\log_2$(p−1).◆

综合①②可知：◆

当 p＞3 时，f(x)的值域是（−∞, 2$\log_2$(p+1)−2］；◆

当 1＜p≤3 时，函数 f(x)的值域是(−∞, 1+$\log_2$(p−1)).

小结归纳

1．处理对数函数的有关问题，要紧密联系函数图象，运用数形结合的思想进行求解.

2．对数函数值的变化特点是解决含对数式问题时使用频繁的关键知识，要达到熟练、运用自如的水平，使用时常常要结合对数的特殊值共同分析.

3．含有参数的指对数函数的讨论问题是重点题型，解决这类问题最基本的分类方案是以“底”大于 1 或小于 1 分类.

4．含有指数、对数的较复杂的函数问题大多数都以综合形式出现，与其它函数(特别是二次函数)形成的函数问题，与方程、不等式、数列等内容形成的各类综合问题等等，因此要注意知识的相互渗透或综合.

第 7 课时　　函数的图象

基础过关

一、基本函数图象特征（作出草图）

1．一次函数为___________；

2．二次函数为____________；

3．反比例函数为_________；

4．指数函数为____________，对数函数为_________.

二、函数图象变换

1．平移变换：①水平变换：y＝f(x)→y＝f(x－a) (a>0)

y＝f(x)→y＝f(x＋a) (a>0)

② 竖直变换：y＝f(x)→y＝f(x)＋b (b>0)

y＝f(x)→y＝f(x)－b (b>0)

2．对称变换：

① y＝f(－x)与 y＝f(x)关于_____对称

② y＝－f(x)与 y＝f(x)关于_____对称

③ y＝－f(－x)与 y＝f(x)关于_____对称

④ y＝f^{-1}(x)与 y＝f(x)关于_____对称

⑤ y＝|f(x)|的图象是将 y＝f(x)图象的_____

⑥ y＝f(|x|)的图象是将 y＝f(x)图象的_____

3．伸缩变换：

① y＝Af (x) (A>0)的图象是将 y＝f(x)的图象的___.

② y＝f (ax) (a>0)的图象是将 y＝f(x)的图象的___.

4．若对于定义域内的任意 x，若 f (a－x)＝f (a＋x) (或 f (x)＝f (2a－x))，则 f (x)关于____对称，若 f (a－x)＋f (a＋x)＝2b (或 f (x)＋f (2a－x)＝2b)，则 f (x)关于___对称.

典型例题

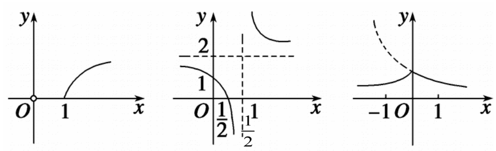
例 1　作出下列函数的图象. ◆

（1）y=(lgx+|lgx|)；◆（2）y=；◆（3）y=$^{|x|}$. ◆　$\frac{2x-1}{x-1}$　$(\frac{1}{2})$

解：（1）y= $\begin{cases}0 & (0<x<1).\\ \lg x & (x\geq 1).\end{cases}$

（2）由 y=, 得 y=+2. ◆作出 y=的图象，将 y=的图象向右平移一个单位，再向上平移 2 个单位得 y=+2 的图象. ◆　$\frac{2x-1}{x-1}$　$\frac{1}{x}$

（3）作出 y=（）^{x}的图象，保留 y=（）^{x}图象中 x≥0 的部分，加上 y=（）^{x}的图象中 x＞0 的部分关于 y 轴的对称部分，即得 y=（）$^{|x|}$的图象.其图象依次如下：◆　$\frac{1}{2}$



变式训练 1：作出下列各个函数的图象：

（1）y=2-2^{x}；（2）y=|log（1-x）|；

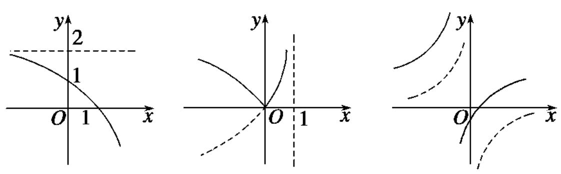
（3）y=. ◆　$\frac{2x-1}{x+1}$

解：（1）由函数 y=2^{x}的图象关于 x 轴对称可得到 y=-2^{x}的图象，再将图象向上平移 2 个单位，可得 y=2-2^{x}的图象. 如图甲. ◆

（2）由 y=logx 的图象关于 y 轴对称，可得 y=log（-x）的图象，再将图象向右平移 1 个单位，即得到 y=log(1-x). 然后把 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方，可得到 y=|log（1-x）|的图象. 如图乙. ◆　$\frac{1}{2}$

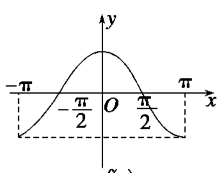
（3）y=. ◆　$\frac{2x-1}{x+1}=2-\frac{3}{x+1}$

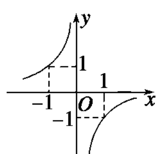
先作出 y=-的图象，如图丙中的虚线部分，然后将图象向左平移 1 个单位，向上平移 2 个单位，即得到所求图象. 如图丙所示的实线部分.　$\frac{3}{x}$

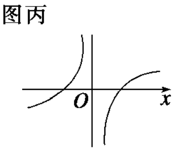


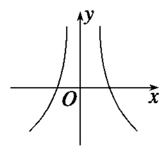
图甲　图乙　图丙

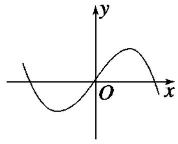
例 2　函数 y=f(x)与函数 y=g(x)的图象如图　　）◆

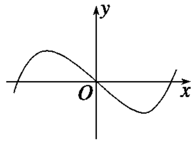

y=f(x)


y=g(x)


A

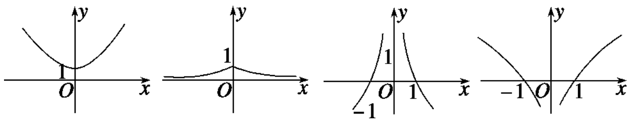

B


C


D

解：■A■◆

变式训练 2：设 a＞1, 实数 x, y 满足 $|x|-\frac{1}{y}\log_a=0$, 则 y 关于 x 的函数的图象形状大致是(　　)



解：■B■◆

例 3 设函数 $f(x)=x^2-2|x|-1$ $(-3\leqslant x\leqslant 3)$.◆

（1）证明：f(x)是偶函数；◆

（2）画出函数的图象；◆

（3）指出函数 f(x)的单调区间，并说明在各个单调区间上 f(x)是增函数还是减函数；◆

（4）求函数的值域.◆

（1）**证明**　$f(-x)=(-x)^2-2|-x|-1$◆$=x^2-2|x|-1=f(x)$,◆

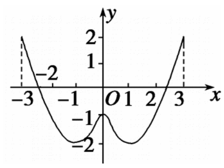
即 $f(-x)=f(x)$, ∴f(x)是偶函数.◆

（2）**解：**　当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$,◆

当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$,◆

即 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2-2 & (0\leq x\leq 3)\\(x+1)^2-2 & (-3\leq x<0)\end{cases}$,

根据二次函数的作图方法，可得函数图象如图所示.◆



（3）**解：**　函数 f(x)的单调区间为［-3，-1），［-1，0），［0，1），［1，3］.

f（x）在区间［-3，-1）和［0，1）上为减函数，在［-1，0），［1，3］上为增函数.（4）**解：**　当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)=(x-1)^2-2$ 的最小值为-2, 最大值为 f(3)=2;◆

当 $x<0$ 时，函数 $f(x)=(x+1)^2-2$ 的最小值为-2, 最大值为 f(-3)=2;◆

故函数 f(x)的值域为［-2，2］.

变式训练 3：当 $x\in(1,2)$ 时, 不等式 $(x-1)^2<\log_a x$ 恒成立, 则 a 的取值范围为________.◆

解：　(1, 2]

小结归纳

1．作函数图象的基本方法是：

① 讨论函数的定义域及函数的奇偶性和单调性；

② 考虑是否可由基本初等函数的图象变换作出图象；

③ 准确描出关键的点线(如图象与 x、y 轴的交点，极值点(顶点)，对称轴，渐近线，等等).

2．图象对称性证明需归结为任意点的对称性证明.

3．注意分清是一个函数自身是对称图形，还是两个不同的函数图象对称.

第 8 课时　　幂函数

基础过关

1．幂函数的概念：一般地，我们把形如_____的函数称为幂函数，其中是自变量，______是常数；

注意：幂函数与指数函数的区别.

2.幂函数的性质：

（1）幂函数的图象都过点___________；

（2）当时，幂函数在上_____；当时，幂函数在上___________；$[0,+\infty)$

（3）当时，幂函数是___________；当时，幂函数是___________. $\alpha=-2,2$ $\alpha=-1,1,3,\frac{1}{3}$

3．幂函数的性质：

（1）都过点_________；

（2）任何幂函数都不过_________象限；

（3）当时，幂函数的图象过_________. $\alpha>0$

4．幂函数的图象在第一象限的分布规律：$(1,1)$（1）在经过点平行于轴的直线的右侧，按幂指数由小到大的关系幂函数的图象从　　到_________分布；

（2）幂指数的分母为偶数时，图象只在_______象限；幂指数的分子为偶数时，图象在第一、第二象限关于_______轴对称；幂指数的分子、分母都为奇数时，图象在第一、第三象限关于_________对称.

典型例题

例1. 写出下列函数的定义域，并指出它们的奇偶性：

（1）　　（2）　　（3）

（4）　　（5）　　（6）

$y=x^3$　$y=x^{\frac{1}{2}}$　$y=x^{-2}$　$y=x^2+x^{-2}$　$y=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$　$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+3(-x)^{\frac{1}{4}}$

解：（1）此函数的定义域为R，

$$\because f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$$

∴此函数为奇函数.

（2）$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

∴此函数的定义域为 $[0,+\infty)$

$\because$ 此函数的定义域不关于原点对称

∴此函数为非奇非偶函数.

（3）$y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$

∴此函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$\because f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x)$$

∴此函数为偶函数

（4）$y=x^2+x^{-2}=x^2+\frac{1}{x^2}$

∴此函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$\because f(-x)=(-x)^2+\frac{1}{(-x)^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=f(x)$$

∴此函数为偶函数

（5）$y=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

∴此函数的定义域为 $[0,+\infty)$

$\because$ 此函数的定义域不关于原点对称

∴此函数为非奇非偶函数

（6）

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+3(-x)^{\frac{1}{4}}=\sqrt{x}+3\sqrt[4]{-x}$$

$\therefore \begin{cases} x\ge 0 \\ -x\ge 0 \end{cases}$ $\therefore x=0$

∴此函数的定义域为 $\{0\}$

∴此函数既是奇函数又是偶函数

变式训练1：讨论下列函数的定义域、值域，奇偶性与单调性：

（1） （2） （3）（4）（5） $y=x^{\frac{5}{4}}$ $y=x^{\frac{4}{3}}$ $y=x$

分析：要求幂函数的定义域和值域，可先将分数指数式化为根式．

解：（1）定义域R，值域R，奇函数，在R上单调递增．

（2）定义域，值域，偶函数，在上 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 单调递增，

在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．

（3）定义域，值域，偶函数，非奇非偶 $[0,+\infty)$ 函数，在上单调递增．

（4）定义域，值域，奇函数，在上 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 单调递减，在上单调递减．

（5）定义域，值域，非奇非偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．

例2 比较大小：

（1） （2） $1.5^{\frac{1}{2}},1.7^{\frac{1}{2}}$ $(-1.2)^3,(-1.25)^3$

（3） $5.25^{-1},5.26^{-1},5.26^{-2}$

（4） $0.5^3,3^{0.5},\log_3 0.5$

解：（1）∵在上是增函数，，∴ $1.5<1.7$ $1.5^{\frac{1}{2}}<1.7^{\frac{1}{2}}$

（2）∵在上是增函数， $y=x^3$

，∴ $-1.2>-1.25$ $(-1.2)^3>(-1.25)^3$

（3）∵在上是减函数， $y=x^{-1}$ $(0,+\infty)$

，∴； $5.25<5.26$ $5.25^{-1}>5.26^{-1}$

∵是增函数，， $y=5.26^x$ $-1>-2$

∴； $5.26^{-1}>5.26^{-2}$

综上， $5.25^{-1}>5.26^{-1}>5.26^{-2}$

（4）∵，，， $0<0.5^3<1$ $3^{0.5}>1$ $\log_3 0.5<0$

∴ $\log_3 0.5<0.5^3<3^{0.5}$

变式训练2：将下列各组数用小于号从小到大排列：

（1） $2.5^{\frac{2}{3}},(-1.4)^{\frac{2}{3}},(-3)^{\frac{2}{3}}$

（2） $0.16^{-\frac{3}{4}},0.5^{-\frac{3}{2}},6.25^{\frac{3}{8}}$

（3） $(\frac{2}{3})^{-\frac{1}{3}},(\frac{2}{5})^{\frac{1}{2}},(\frac{5}{3})^{-\frac{1}{3}},3^{\frac{1}{3}},(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}$

解：（1） $(-1.4)^{\frac{2}{3}}<2.5^{\frac{2}{3}}<(-3)^{\frac{2}{3}}$

（2） $6.25^{\frac{3}{8}}<0.5^{-\frac{3}{2}}<0.16^{-\frac{3}{4}}$

（3） $(\frac{2}{5})^{\frac{1}{2}}<(\frac{5}{3})^{-\frac{1}{3}}<(\frac{2}{3})^{-\frac{1}{3}}<(\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{1}{3}}$

例3 已知幂函数（）的图象与轴、轴都无交点，且关于原点对称，求的值． $y=x^{m^2-2m-3}$ $m\in Z$

分析：幂函数图象与轴、轴都无交点，则指数小于或等于零；图象关于原点对称，则函数为奇函数．结合，便可逐步确定的值． $m\in Z$

解：∵幂函数（）的图象与轴、轴都无交点， $y=x^{m^2-2m-3}$ $m\in Z$

∴，∴； $m^2-2m-3\le 0$ $-1\le m\le 3$

∵，∴，又函数图象关于原点对称， $m\in Z$ $(m^2-2m-3)\in Z$

∴是奇数，∴或． m^2-2m-3 $m=0$ $m=2$

变式训练3：证明幂函数在上是增函数． $[0,+\infty)$ $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

分析：直接根据函数单调性的定义来证明．

证明：设，$0\le x_1<x_2$

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^{\frac{1}{2}}-x_2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$

$\because x_1<x_2$

$\therefore \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$，$x_1-x_2<0$

即 $\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，$f(x_1)<f(x_2)$

此函数在上是增函数 $[0,+\infty)$

小结归纳

1．注意幂函数与指数函数的区别．

2.幂函数的性质要熟练掌握

第9课时　　函数与方程

基础过关

1．一元二次函数与一元二次方程

一元二次函数与一元二次方程（以后还将学 x 习一元二次不等式）的关系一直是高中数学函数这部分内容中的重点，也是高考必考的知识点．我们要弄清楚它们之间的对应关系：一元二次函数的图象与轴的交点的横坐标是对应一元二次方程的解；反之，一元二次方程的解也是对应的一元二次函数的图象与轴的交点的横坐标．

2．函数与方程

两个函数与图象交点的横坐标就是方程 $y=f(x)$ $y=g(x)$ $f(x)=g(x)$ 的解；反之，要求方程的解，也只要求函数与图象交点的横坐标．

3．二分法求方程的近似解

二分法求方程的近似解，首先要找到 $f(x)=0$ 方程的根所在的区间，则必有，再取 (m,n) $f(m)\cdot f(n)<0$ $p=\frac{m+n}{2}$

区间的中点，再判断的正负号，若，则根在区间中；若，则根在中；若，则即为方程的根．按照以上方法重复进行下去，直到区间的两个端点的近似值相同（且都符合精确度要求），即可得一个近似值．

典型例题

例1.（1）若，则方程的根是(　　) $f(4x)=x$ $f(x)=\frac{x-1}{x}$

A.　2　B.－$\frac{1}{2}$　C.　$\frac{1}{2}$　D.－2

解：A.

（2）设函数对都满足，且方程恰有6个不同的实数根，则这6个实根的和为(　　) $f(3+x)=f(3-x)$ $f(x)=0$

A. 0　　B. 9　　C. 12　　D. 18

解：由知的图象有对称轴，方程的6个根在轴上对应的点关于直线对称，依次设为，故6个根的和为18，答案为D. $f(3+x)=f(3-x)$ $f(x)$ $x=3$ $f(x)=0$ $3-t_1, 3-t_2, 3-t_3, 3+t_1, 3+t_2, 3+t_3$

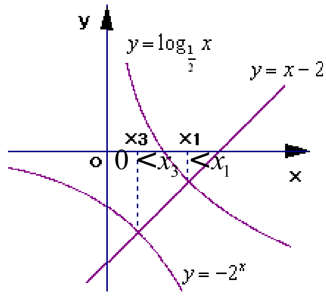
（3）已知，（、、∈R），则有(　　) $\frac{\sqrt{5}b-5c}{5a}=1$ a b c

A.　B.　C.　D. $b^2>4ac$ $b^2\ge 4ac$

解法一：：依题设有 $a\cdot 5-b\cdot\sqrt{5}+c=0$

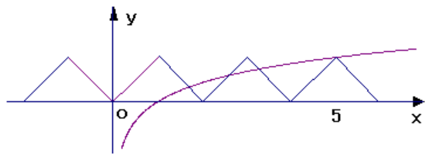
∴是实系数一元二次方程的一个实 $ax^2+bx+c=0$ $-\sqrt{5}$

根；
∴△＝≥0　∴，答案为B.　$b^2 \geq 4ac$
解法二：去分母，移项，两边平方得：＋＝20.　$5b^2 = 25a^2 + 10ac + c^2$
∴，答案为B.　$b^2 \geq 4ac$
（4）关于的方程 的两个实根 、满足 ，则实数 m 的取值范围___　$x^2-(2m-8)x+m^2-16=0$　$x_1<\frac{3}{2}<x_2$
解：设，则，即：，解得：.　$f(x)=x^2-(2m-8)x+m^2-16$　$f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}(2m-8)+m^2-16<0$
（5）若对于任意，函数的值恒大于零，则的取值范围是____________　$f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$
解：设，显然，　$g(a)=(x-2)a+x^2-4x+4$
则，即，解得：.　$g(-1)=x^2-5x+6>0$　$g(1)=x^2-3x+2>0$　$x>3$ 或 $x<1$
变式训练1：　当时，函数的值有正值也有负值，则实数的取值范围是（　　）
A.　B.　C.　D.　$a<\frac{1}{2}$　$a>1$　$\frac{1}{2}<a<1$　$a>1$ 或 $a<\frac{1}{2}$
解：D
例2. 设依次是方程，，的实数根，试比较的大小.　$\log_{\frac{1}{2}}x+2=x$　$\log_2(x+2)=\sqrt{-x}$　$2^x+x=2$
解：在同一坐标内作出函数，，的图象　$y=\log_{\frac{1}{2}}x$



从图中可以看出，又，故　$x_2<0<x_3<x_1$

变式训练2：已知函数满足，且∈[－1,1]时，，则与的图象交点的个数是(　　)　$f(x+1)=f(x-1)$　$f(x)=|x|$　$y=\log_5 x$
A. 3　B. 4　C. 5　D. 6
解：由知故是周期为2的函数，在同一坐标系中作出与的图象，可以看出，交点个数为4.



例 3. 已知二次函数为常数，且 满足条件：且方程有等根

$f(x-1)=f(3-x)$　$f(x)=ax^2+bx$

（1）求的解析式；

（2）是否存在实数、，使定义域和值域分别为［m，n］和［4m，4n］，如果存在，求出 m、n 的值；如果不存在，说明理由

解：（1）∵方程有等根，∴，得 b=2

$\Delta=(b-2)^2=0$

由知此函数图象的对称轴方程为，得，故

$x=-\frac{b}{2a}=1$

$f(x)=-x^2+2x$

（2），∴4n1，即

而抛物线的对称轴为

$f(x)=-(x-1)^2+1$

∴时，在［m，n］上为增函数

若满足题设条件的m，n 存在，则，

$f(m)=4m$

又，　∴，这时定义域为［－2，0］，值域为［－8，0］

由以上知满足条件的 m、n 存在，．

变式训练 3： 已知函数（

（1）求证：在(0,+∞)上是增函数；

（2）若在(0,+∞)上恒成立，求的取值范围；

（3）若在［m，n］上的值域是［m，n］(m≠n)，求的取值范围

解：（1）**证明**　任取

∵，∴，，

$f(x_1)-f(x_2)=\cdots=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$

∴，即，故在(0,+∞)上是增函数

（2）**解：**∵在(0,+∞)上恒成立，且 a>0，

∴ 在（0，+∞）上恒成立，

令，当且仅当即 x=时取等号

$g(x)=2x+\frac{1}{2x}\geq 2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{2x}}$

要使在(0,+∞)上恒成立，则

故的取值范围是［,+

∞).

（3）**解：** 由（1）$f(x)$ 在定义域上是增函数

∴ $m=f(m),\ n=f(n)$，即 $m^2-\frac{1}{a}m+1=0$，$n^2-\frac{1}{a}n+1=0$

故方程 $x^2-\frac{1}{a}x+1=0$ 有两个不相等的正根 m，n，注意到 $mn=1$，

故只需要 $\Delta=(\frac{1}{a})^2-4>0$，由于 $a>0$，则 $0<a<\frac{1}{2}$.

例 4． 若函数 $f(x)=2^{-|x-1|}-m$ 的图象与轴有交点，则实数 m 的取值范围是（ ）

A. B. C. D.

解： 令 $f(x)=0$，得：[illegible]，∵ $0<(\frac{1}{2})^{|x-1|}\le 1$，∴ $0<m\le 1$，即 $0<m\le 1$.

变式训练 4： 对于函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+b-1\ (a\neq 0)$，若存在 x_0∈R，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点 已知函数

（1）当 $a=1,\ b=-2$ 时，求 $f(x)$ 的不动点；

（2）若对任意实数 b，函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点，求 a 的取值范围；

解：（1）当 $a=1,\ b=-2$ 时，$f(x)=x^2-x-3$，

由题意可知，$x=x^2-x-3$，得 $x_1=-1,\ x_2=3$

故当 $a=1,\ b=-2$ 时，$f(x)$ 的不动点 $-1,\ 3$.

（2）∵ $f(x)=ax^2+(b+1)x+b-1\ (a\neq 0)$ 恒有两个不动点，

∴ $x=ax^2+(b+1)x+b-1$，

即 $ax^2+bx+b-1=0$ 恒有两相异实根

∴ $\Delta=b^2-4ab+4a>0\ (b\in R)$ 恒成立

于是 $\Delta'=(4a)^2-16a<0$ 解得 $0<a<1$

故当 b∈R，恒有两个相异的不动点时，$0<a<1$

小结归纳

本节主要注意以下几个问题：

1．利用函数的图象求方程的解的个数；

2．一元二次方程的根的分布；

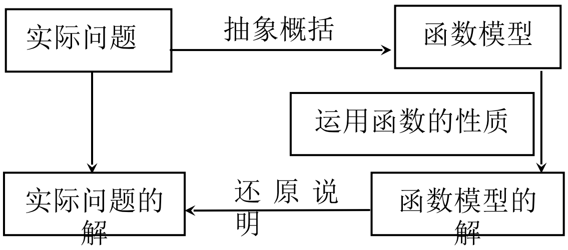
3．利用函数的最值解决不等式恒成立问题

第 10 课时 函数模型及其应用

基础过关

1．抽象概括：研究实际问题中量，确定变量之间的主、被动关系，并用 x、y 分别表示问题中的变量；

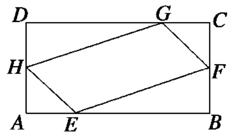
2．建立函数模型：将变量 y 表示为 x 的函数，在中学数学内，我们建立的函数模型一般都是函数的解析式；
3．求解函数模型：根据实际问题所需要解决的目标及函数式的结构特点正确选择函数知识求得函数模型的解，并还原为实际问题的解.
这些步骤用框图表示是：



典型例题

例 1． 如图所示，在矩形 ABCD 中，已知 AB=a，BC=b（b＜a）,在 AB，AD，CD，CB 上分别截取 AE，AH，CG，CF 都等于 x，当 x 为何值时，四边形 EFGH 的面积最大？并求出最大面积.◆

解： 设四边形 EFGH 的面积为 S，◆



则 $S_{\triangle AEH}=S_{\triangle CFG}=x^2$，

$S_{\triangle BEF}=S_{\triangle DGH}=$（a−x）（b−x），◆

∴S=ab−2［^{2}+（a−x）（b−x）］◆

=−2x²+（a+b）x=−2（x−^{2}+◆ $\frac{(a+b)^2}{8}$，

由图形知函数的定义域为{x|0＜x≤b}.◆

又 0＜b＜a,∴0＜b＜,若≤b,即 a≤3b 时，◆

则当 x=时，S 有最大值;◆

若＞b,即 a＞3b 时，◆

S（x）在（0,b］上是增函数，◆

此时当 x=b 时，S 有最大值为◆

−2(b−)²+=ab−b²,◆

综上可知，当 a≤3b 时，x=时，◆

四边形面积 S_{max}=,◆

当 a＞3b 时，x=b 时，四边形面积 S_{max}=ab−b².◆

变式训练 1： 某商人将进货单价为 8 元的某种商品按 10 元一个销售时，每天可卖出 100 个，现在他采用提高售价，减少进货量的办法增加利润，已知这种商品销售单价每涨 1 元，销售量就减少 10 个，问他将售价每个定为多少元时，才能使每天所赚的利润最大？并求出最大值.

解： 设每个提价为 x 元（x≥0），利润为 y 元，每天销售总额为（10+x）（100−10x）元，进货总额为 8（100−10x）元，◆

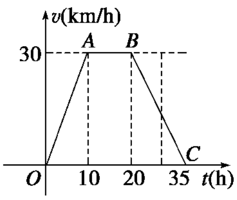
显然 100−10x＞0,即 x＜10,◆

则 y=（10+x）（100−10x）−8(100−10x)=(2+x)(100−10x)=−10(x−4)²+360 (0≤x＜10).◆

当 x=4 时，y 取得最大值，此时销售单价应为 14 元，最大利润为 360 元.◆

例 2． 据气象中心观察和预测：发生于 M 地的沙尘暴一直向正南方向移动，其移动速度 v（km/h）与时间 t（h）的函数图象如图所示，过线段 OC 上一点 T（t，0）作横轴的垂线 l，梯形 OABC 在直线 l 左侧部分的面积即为 t（h）内沙尘暴所经过的路程 s（km）.

（1）当 t=4 时，求 s 的值；◆
（2）将 s 随 t 变化的规律用数学关系式表示出来；◆
（3）若 N 城位于 M 地正南方向，且距 M 地 650 km，试判断这场沙尘暴是否会侵袭到 N 城，如果会，在沙尘暴发生后多长时间它将侵袭到 N 城？如果不会，请说明理由.◆



解：（1）由图象可知：
当 t=4 时，v=3×4=12,◆
∴s=$\frac{1}{2}$×4×12=24.◆
（2）当 0≤t≤10 时，s=$\frac{1}{2}$·t·3t=$\frac{3}{2}t^2$，◆
当 10＜t≤20 时，s=$\frac{1}{2}$×10×30+30（t-10）=30t-150；◆
当 20＜t≤35 时，s=$\frac{1}{2}$×10×30+10×30+(t-20)×30-$\frac{1}{2}$×(t-20)×2(t-20)=-t^2+70t-550.
综上可知 s=

$$s=\begin{cases}\frac{3}{2}t^2, & t\in[0,10],\\ 30t-150, & t\in(10,20],\\ -t^2+70t-550, & t\in(20,35].\end{cases}$$

(3)∵t∈［0，10］时，
s_{max}=$\frac{3}{2}$×10^2=150＜650.◆
t∈（10，20］时，
s_{max}=30×20-150=450＜650.◆
∴当 t∈（20，35］时，
令-t^2+70t-550=650.◆
解得 t_1=30, t_2=40,∵20＜t≤35,◆
∴t=30，所以沙尘暴发生 30 h 后将侵袭到 N 城.◆

变式训练 2：某工厂生产一种机器的固定成本（即固定投入）为 0.5 万元，但每生产 100 台，需要加可变成本（即另增加投入）0.25 万元.市场对此产品的年需求量为 500 台，销售的收入函数为 R（x）=5x-$\frac{x^2}{2}$（万元）(0≤x≤5)，其中 x 是产品售出的数量（单位：百台）.
（1）把利润表示为年产量的函数；◆
（2）年产量是多少时，工厂所得利润最大？◆
（3）年产量是多少时，工厂才不亏本？◆

解：（1）当 x≤5 时，产品能售出 x 百台；◆
当 x＞5 时，只能售出 5 百台，◆
故利润函数为 L（x）=R（x）-C（x）◆
=

$$\begin{cases}\left(5x-\frac{x^2}{2}\right)-(0.5+0.25x) & (0\le x\le 5)\\ \left(5\times 5-\frac{5^2}{2}\right)-(0.5+0.25x) & (x>5)\end{cases}=\begin{cases}4.75x-\frac{x^2}{2}-0.5 & (0\le x\le 5),\\ 12-0.25x & (x>5).\end{cases}$$

(2)当 0≤x≤5 时，
L（x）=4.75x-$\frac{x^2}{2}$-0.5，◆
当 x=4.75 时，
L(x)$_{max}$=10.781 25 万元.◆
当 x＞5 时，
L（x）=12-0.25x 为减函数，◆
此时 L（x）＜10.75(万元)．∴生产 475 台时利润最大.◆

（3）由

$$\begin{cases}0\le x\le 5,\\ 4.75x-\dfrac{x^2}{2}-0.5\ge 0,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x>5,\\ 12-0.25x\ge 0.\end{cases}$$

得 x≥4.75-$\sqrt{21.562\ 5}$=0.1(百台）或 x＜48(百台).◆

∴产品年产量在 10 台至 4 800 台时，工厂不亏本.◆

例 3. 某市居民自来水收费标准如下：每户每月用水不超过 4 吨时，每吨为 1.80 元，当用水超过 4 吨时，超过部分每吨 3.00 元，某月甲、乙两户共交水费 y 元，已知甲、乙两用户该月用水量分别为 5x，3x 吨.◆

（1）求 y 关于 x 的函数；◆

（2）若甲、乙两户该月共交水费 26.4 元，分别求出甲、乙两户该月的用水量和水费.◆

解：（1）当甲的用水量不超过 4 吨时，即 5x≤4，乙的用水量也不超过 4 吨，

y=（5x+3x）×1.8=14.4x;◆

当甲的用水量超过 4 吨，乙的用水量不超过 4 吨时，◆

即 3x≤4 且 5x＞4,◆

y=4×1.8+3x×1.8+3×(5x-4)=20.4x-4.8.◆

当乙的用水量超过 4 吨时，◆

即 3x＞4, y=8×1.8+3(8x-8)=24x-9.6，◆

所以 y=

$$\begin{cases}14.4x & (0\le x\le \frac{4}{5})\\ 20.4x-4.8 & (\frac{4}{5}<x\le\frac{4}{3}).\\ 24x-9.6 & (x>\frac{4}{3})\end{cases}$$

$\frac{4}{5}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{4}{3}$

(2)由于 y=f(x)在各段区间上均为单调递增，◆

当 x∈［0，］时, y≤f（）＜26.4;◆

当 x∈（，］时，y≤f（）＜26.4;◆

当 x∈（,+∞）时，令 24x-9.6=26.4,解得 x=1.5,◆

所以甲户用水量为 5x=7.5 吨，◆

付费 S_1=4×1.8+3.5×3=17.70（元）;◆

乙户用水量为 3x=4.5 吨，◆

付费 S_2=4×1.8+0.5×3=8.70（元).

变式训练 3：1999 年 10 月 12 日“世界 60 亿人口日”，提出了“人类对生育的选择将决定世界未来”的主题，控制人口急剧增长的紧迫任务摆在我们的面前.◆

（1）世界人口在过去 40 年内翻了一番，问每年人口平均增长率是多少？◆

（2）我国人口在 1998 年底达到 12.48 亿，若将人口平均增长率控制在 1%以内，我国人口在 2008 年底至多有多少亿？◆

以下数据供计算时使用：

数 N	1.010	1.015	1.017	1.310	2.000
对数 lgN	0.004 3	0.006 5	0.007 3	0.117 3	0.301 0
数 N	3.000	5.000	12.48	13.11	13.78
对数 lgN	0.477 1	0.699 0	1.096 2	1.117 6	1.139 2

解：（1）设每年人口平均增长率为 x，n 年前的人口数为 y，◆

则 y·$(1+x)^n$=60，则当 n=40 时，y=30，◆

即 $30(1+x)^{40}=60$，∴$(1+x)^{40}=2$，

两边取对数，则 40lg(1+x)=lg2，◆

则 lg（1+x）==0.007 525，◆ $\frac{\lg 2}{40}$

∴1+x≈1.017，得 x=1.7%.

（2）依题意，y≤12.48（1+1%）^{10}，◆

得 lgy≤lg12.48+10×lg1.01=1.139 2,◆

∴y≤13.78，故人口至多有 13.78 亿.

答　每年人口平均增长率为 1.7%，2008 年人口至多有 13.78 亿.

小结归纳

解决函数应用问题应着重注意以下几点：

1．阅读理解、整理数据：通过分析、画图、列表、归类等方法，快速弄清数据之间的关系，数据的单位等等；

2．建立函数模型：关键是正确选择自变量将问题的目标表示为这个变量的函数，建立函数模型的过程主要是抓住某些量之间的相等关系列出函数式，不要忘记考察函数的定义域；

3．求解函数模型：主要是计算函数的特殊值，研究函数的单调性，求函数的值域、最大(小)值等，注意发挥函数图象的作用.

4．还原评价：应用问题不是单纯的数学问题，既要符合数学学科又要符合实际背景，因于解出的结果要代入原问题进行检验、评判最后作出结论，作出回答.

函数单元测试题

一、选择题

1.函数 y=的定义域是　　（　）◆ $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$

■A.［1，+∞）　B.（,+∞）■　C. $\frac{2}{3}$

［，1］■　D.（,1］◆

2.（2009·河南新郑二中模拟）设函数 f(x)=x|x|+bx+c,给出下列四个命题：　　（　）

① 当 b≥0 时，函数 y=f(x)是单调函数

② 当 b=0,c＞0 时，方程 f(x)=0 只有一个实根

③ 函数 y=f(x)的图象关于点（0，c）对称

④ 方程 f(x)=0 至多有 3 个实根，其中正确命题的个数为

■A.1 个　B.2 个　C.3 个　D.4 个◆

3.（2008·湛江模拟）下列函数在其定义域内既是奇函数又是增函数的是（　）◆

■A.y=x (x∈(0,+∞))　$\frac{1}{2}$ B.y=3^x(x∈R)◆

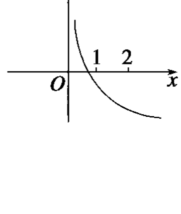
■C.y=x (x∈R)■　$\frac{1}{3}$ D.y=lg|x|(x≠0)◆

4.（2008·杭州模拟）已知偶函数 f(x)满足 条件：当 x∈R 时，恒有 f(x+2)=f(x),且 0≤x≤1 时，有＞0,则 f（,f（,f（的大小关系是　　（　）

■A. f（＞f（＞f（■

B. f（＞ f（＞f（■

■C. f（＞ f（＞ f（



■D. f（＞f（＞f（,

5.如图为函数 $y=m+\log_n x$ 的图象，其中 m，n 为常数，则下列结论正确的是（ ）

■A.m＜0,n＞1 ■ B.m＞0,n＞1◆

■C.m＞0,0＜n＜1◆ ■D.m＜0,0＜n＜1◆

6.已知 f(x)是以 2 为周期的偶函数，且当 x∈(0,1)时，$f(x)=2^x-1$，则 $f(\log_2 12)$的值为（ ）◆A. B. C.2 D.11◆

7.（2008·重庆理，4）已知函数 y=的 $\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 最大值为M，最小值为m，则的值为（ ）◆A. B.◆ C. D.◆

8.若方程 $2ax^2-x-1=0$ 在（0，1）内恰有一解，则 a 的取值范围是 （ ）

■A.a＜-1■ B.a＞1◆ C.-1＜a＜1 D.0≤a＜1◆

9.f(x)是定义在 R 上的以 3 为周期的偶函数，且 f(2)=0,则方程 f(x)=0 在区间（0，6）内解的个数的最小值是 （ ）

■A.5■ B.4 C.3 D.2◆

10.某农贸市场出售西红柿，当价格上涨时，供给量相应增加，而需求量相应减少，具体调查结果如下表：

表 1 市场供给表◆

单价（元/kg）	2	2.4	2.8	3.2	3.6	4
供给量（1 000kg）	50	60	70	75	80	90

表2 市场需求表◆

单价（元/kg）	4	3.4	2.9	2.6	2.3	2
供给量（1 000kg）	50	60	65	70	75	80

根据以上提供的信息，市场供需平衡点（即供给量和需求量相等时的单价）应在区间（ ）◆

■A.（2.3，2.4）内■ B.（2.4，2.6）内◆

■C.（2.6，2.8）内■ D.（2.8，2.9）内◆

11.(2008·成都模拟)已知函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+bx)$ (a＞0 且 a≠1)，则下列叙述正确的是（ ）

■A.若 a=,b=-1,则函数 f(x)为 R 上的增函数◆ $\frac{1}{2}$

■B.若 a=,b=-1,则函数 f（x)为 R 上的减函数 ◆

■C.若函数 f(x)是定义在 R 上的偶函数，则 b=±1◆

■D.若函数 f(x)是定义在 R 上的奇函数，则 b=1◆

12.设函数 f（x）=若 f(a)＜1,则实数 a 的取值范围是 （ ）

$$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x-7 & (x<0)\\ \sqrt{x} & (x\ge 0),\end{cases}$$

■A.（-∞,-3） B.(1,+∞)■

C.(-3,1) D.(-∞,-3)∪(1,+∞)◆

二、填空题

13.（2009·广西河池模拟）已知函 $f^{-1}(2)$

数 f(x)=$\log_2(x^2+1)(x\le 0)$，则=____.

14.已知函数 f(x)=则 f($\log_2 3$)的值为

.◆

$$\begin{cases}(\frac{1}{2})^x & (x\ge 4)\\ f(x+1) & (x<4)\end{cases}$$

15.（2008·通州模拟）用二分法求方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间［2，3］内的实根，取区间中点 $x_0=2.5$,那么下一个有实根的区间是____.◆

答案 （2，2.5）◆

16.（2008·福州模拟）对于函数 f(x)定义域中任意的 x_1,x_2 ($x_1\neq x_2$),◆

有如下结论：◆

①$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$;◆

②$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;◆

③$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$＞0;◆

④f($\frac{x_1+x_2}{2}$)＜$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

当 f(x)=2^x 时，上述结论中正确结论的序号是_____.◆

三、解答题

17．设直线 x=1 是函数 f(x)的图象的一条对称轴，对于任意 x∈R，f(x+2)=-f(x),当-1≤x≤1 时，f(x)=x^3.

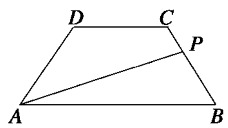
（1）证明：f(x)是奇函数；◆

（2）当 x∈［3，7］时，求函数 f(x)的解析式.◆

18.等腰梯形 ABCD 的两底分别为 AB=10，CD=4，两腰 AD=CB=5，动点 P 由 B 点沿折线 BCDA 向 A 运动，设 P 点所经过的路程为 x，三角形 ABP 的面积为 S◆

（1）求函数 S=f(x)的解析式；◆

（2）试确定点 P 的位置，使△ABP 的面积 S 最大.◆



19.（2008·深圳模拟）据调查，某地区 100 万从事传统农业的农民，人均收入 3 000 元，为了增加农民的收入，当地政府积极引进资本，建立各种加工企业，对当地的农产品进行深加工，同时吸收当地部分农民进入加工企业工作，据估计，如果有 x (x＞0)万人进企业工作，那么剩下从事传统农业的农民的人均收入有望提高 2x%,而进入企业工作的农民的人均收入为 3 000a 元 (a＞0).◆

（1）在建立加工企业后，要使从事传统农业的农民的年总收入不低于加工企业建立前的农民的年总收入，试求 x 的取值范围；◆

（2）在（1）的条件下，当地政府应该如何引导农民（即 x 多大时），能使这 100 万农民的人均年收入达到最大.◆

20.设a,b∈R，且a≠2,定义在区间（-b,b）内的函数f(x)=是奇函数.◆ $\lg\frac{1+ax}{1+2x}$

（1）求b的取值范围；◆

（2）讨论函数f(x)的单调性.◆

21.已知定义域为R的函数f(x)满足$f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.◆

(1)若f(2)=3,求f(1);又若f(0)=a,求f(a);◆

(2)设有且仅有一个实数x_0,使得$f(x_0)=x_0$,求函数f(x)解析表达式.◆

22.（2008·南京模拟）已知函数y=f(x)是定 $\frac{3}{2}$ 义在区间［-，］上的偶函数，且x∈［0，］时，f（x）=$-x^2-x+5$.◆ $\frac{3}{2}$

（1）求函数f(x)的解析式；◆

（2）若矩形ABCD的顶点A，B在函数y=f(x)的图象上，顶点C，D在x轴上，求矩形ABCD面积的最大值.◆

函数单元测试题答案

一、选择题

1. D■◆

2.■D■◆

3.■C■◆

4.（B■◆

5.■D■◆

6.■A■◆

7. C■◆

8. B■◆

9. B■◆

10. C■◆

11. A■◆

12.■C■◆

二、填空题

13. -◆ $\sqrt{3}$

14. ◆ $\frac{1}{24}$

15.（2，2.5）◆

16. ①③④◆

三、解答题

17. （1）证明 ∵$x=1$是$f(x)$的图象的一条对称轴，◆

∴$f(x+2)=f(-x)$.又∵$f(x+2)=-f(x)$,◆

∴$f(x)=-f(x+2)=-f(-x)$,即$f(-x)=-f(x)$.∴$f(x)$是奇函数.◆

（2）解 ∵$f(x+2)=-f(x)$，∴$f(x+4)=f[(x+2)+2]$◆

$=-f(x+2)=f(x)$，∴$T=4$.若$x\in[3,5]$，则$(x-4)\in[-1,1]$，◆

∴$f(x-4)=(x-4)^3$.又∵$f(x-4)=f(x)$,◆

∴$f(x)=(x-4)^3,x\in[3,5]$.若$x\in(5,7]$，则$(x-4)\in(1,3]$，$f(x-4)=f(x)$.◆

由$x=1$是$f(x)$的图象的一条对称轴可知$f[2-(x-4)]=f(x-4)$◆

且$2-(x-4)=(6-x)\in[-1,1]$，故$f(x)=f(x-4)=f(6-x)=(6-x)^3=-(x-6)^3$.◆

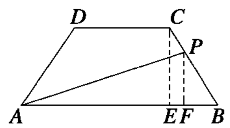
综上可知$f(x)=$

$$\begin{cases}(x-4)^3, & 3\le x\le 5,\\ -(x-6)^3, & 5<x\le 7.\end{cases}$$

18.解 （1）过C点作CE⊥AB于E，◆

在△BEC中，

CE=$\sqrt{5^2-3^2}$=4，∴sinB=$\frac{4}{5}$.◆



由题意，当$x\in(0,5]$时，过P点作PF⊥AB于F，◆

∴PF=xsinB=$\frac{4}{5}$x，∴S=$\frac{1}{2}$×10×$\frac{4}{5}$x=4x,◆

当$x\in(5,9]$时，∴S=$\frac{1}{2}$×10×4=20.◆

当$x\in(9,14]$时，AP=14-x，PF=AP·sinA=$\frac{4(14-x)}{5}$，◆

∴S=$\frac{1}{2}$×10×(14-x) ×$\frac{4}{5}$=56-4x.综上可知,函数S=f(x)=

$$\begin{cases}4x & x\in(0,5]\\ 20 & x\in(5,9]\\ 56-4x & x\in(9,14]\end{cases}.$$

(2)由(1)知,当$x\in(0,5]$时,$f(x)=4x$为增函数,所以,当$x=5$时,取得最大值20.◆

当$x\in(5,9]$时,$f(x)=20$,最大值为20.当$x\in(9,14]$时,$f(x)=56-4x$为减函数,无最大值.◆综上可知:当P点在CD上时,△ABP的面积S最大为20.

19.解（1）由题意得◆

$(100-x)\cdot 3\,000\cdot(1+2x\%)\ge 100\times 3\,000$,即$x^2-50x\le 0$,解得$0\le x\le 50$.◆

又∵$x>0$,∴$0<x\le 50$.◆

(2)设这100万农民的人均年收入为y元,◆

则y=

$$\frac{(100-x)\times 3\,000\times(1+2x\%)+3\,000ax}{100}=\frac{-60x^2+3\,000(a+1)x+300\,000}{100}$$

$=-\frac{6}{10}x^2+30(a+1)x+3\,000$.∴若$25(a+1)\le 50$,即$0<a\le 1$时，当$x=25(a+1)$时，

$$y_{max}=-\frac{6}{10}\times 25^2(a+1)^2+30(a+1)\times 25(a+1)+3\,000=375a^2+750a+3\,375.$$

若$a>1$时，函数在$[0,50]$上是增函数. ∴当$x=50$时，

$y_{max}=-\frac{6}{10}\times 50^2+30(a+1)\times 50+3\,000=-1\,500+1\,500a+1\,500+3\,000=1\,500a+3\,000$.

答 若$0<a\le 1$,当$x=25(a+1)$时,使100万农民人均年收入最大.◆

若$a>1$,当$x=50$时,使100万农民的人均年收入最大.◆

20.解 （1）f(x)=lg (-b＜x＜b)是奇函数等 $\frac{1+ax}{1+2x}$ 价于：◆
对任意 x∈(-b,b)都有◆
① 式即为，由此可得◆
,也即 $a^2x^2=4x^2$,此式对任意 x∈(-b,b)都成立相当于 $a^2=4$,
因为 a≠2,所以 a=-2，
代入②式，得＞0,即-＜x＜,此式对任意 x∈(-b,b)都成立相当于
-≤-b＜b≤,◆
所以 b 的取值范围是（0, ］.◆

$$\begin{cases} f(-x)=-f(x), & ① \\ \frac{1+ax}{1+2x}>0, & ② \end{cases} \quad \lg\frac{1-ax}{1-2x}=-\lg\frac{1+2x}{1+ax}, \quad \frac{1-ax}{1-2x}=\frac{1+2x}{1+ax}$$

$$\frac{1-2x}{1+2x} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

（2）设任意的 x_1,x_2∈(-b,b)，且 x_1＜x_2,由 b∈（0，］，得-≤-b＜x_1＜x_2＜b≤,◆ 所以 0＜$1-2x_2$＜$1-2x_1$,0＜$1+2x_1$＜$1+2x_2$,◆
从而 $f(x_2)-f(x_1)=$

$$\lg\frac{1-2x_2}{1+2x_2}-\lg\frac{1-2x_1}{1+2x_1}=\lg\frac{(1-2x_2)(1+2x_1)}{(1+2x_2)(1-2x_1)}<\lg 1=0.$$

因此 f(x)在（-b,b)内是减函数，
具有单调性.

21.解 (1)因为对任意 x∈R,有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$,◆
所以 $f(f(2)-2^2+2)=f(2)-2^2+2$ 又由 f(2)=3,得 $f(3-2^2+2)=3-2^2+2$,即 f(1)=1.◆
若 f(0)=a,则 $f(a-0^2+0)=a-0^2+0$,即 f(a)=a.◆
(2)因为对任意 x∈R,有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.又因为有且只有一个实数 x_0,使得 $f(x_0)=x_0$.◆
所以对任意 x∈R,有 $f(x)-x^2+x=x_0$.在上式中令 x_0^2 x=x_0,有 $f(x_0)-+x_0=x_0$.◆
又因为 $f(x_0)=x_0$,所以 $x_0-=0$,故 $x_0=0$ 或 $x_0=1$.若 x_0^2 $x_0=0$,则 $f(x)-x^2+x=0$,即 $f(x)=x^2-x$.◆
但方程 $x^2-x=x$ 有两个不同实根，与题设条 件矛盾，故 $x_0\neq0$.◆
若 $x_0=1$，则有 f（x）$-x^2+x=1$,即 $f(x)=x^2-x+1$.易验证该函数满足题设条件.◆

22.解 （1）当 x∈［-，0］时，- $\frac{3}{2}$ x∈［0，］.◆
∴$f(-x)=-(-x)^2-(-x)+5=-x^2+x+5$.又∵f(x)是偶函数，◆
∴f（x）=f(-x)=$-x^2+x+5$.◆∴f(x)=◆

$$\begin{cases} -x^2+x+5, & x\in\left[-\frac{3}{2},0\right] \\ -x^2-x+5, & x\in\left[0,\frac{3}{2}\right]. \end{cases} \quad \frac{3}{2}$$

（2）由题意，不妨设 A 点在第一象限，坐标为（t,$-t^2-t+5$）,其中 t∈（0，］.◆
由图象对称性可知 B 点坐标为（-t，$-t^2-t+5$）.则 S(t)=S 矩形 $_{ABCD}$=2t（$-t^2-t+5$）=$-2t^3-2t^2+10t$.◆ $s'(t)$ =$-6t^2-4t+10$.由=0，得 t_1=-（舍去），t_2=1. $\frac{5}{3}$
当 0＜t＜1 时，＞0;t＞1 时,＜0.◆ $s'(t)$
∴S(t)在（0，1］上单调递增，在［1，］ $\frac{3}{2}$ 上单调递减.∴当 t=1 时，矩形 ABCD 的面积取得极大值 6，
且此极大值也是 S（t）在 t∈（0，］上的最 $\frac{3}{2}$ 大值.从而当 t=1 时，矩形 ABCD 的面积取得最大值 6.

五年高考荟萃

2009 年高考题

$f(x+1)$ $f(x-1)$

1.（2009 全国卷Ⅰ理）函数的定义域为 R，若与都是奇函数，则(　　)

$$f(x)$$

A.是偶函数　　　　　　　　B.是奇函数

$$f(x)\quad f(x)=f(x+3$$

C.　　　　　　　D.是奇函数

答案　D

$f(Q+1$

解析　与都是奇函数，

$\therefore f(-x+1)=-f(x+1), f(-x-1)=$

，

$\therefore f(-x+3)=-f(x+$

$f(4), (6, 0)$

函数关于点，及点对称，函数是周期的周期函数.，，即是奇函数。故选 D

$$-a(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < a$$

2.(2009 浙江理）对于正实数，记为满足下述条件的函数构成的集合：且，有．下列结论中正确的是 （ ）

A. 若，，则

B. 若，，且，则

C. 若，，则

D．若，，且，则

答案　C

解析　对于，即有，令，有，不妨设，，即有，因此有，因此有．

$$f(x)=x^2+\frac{a}{x}(a$$

3.（2009 浙江文）若函数，则下列结论正确的是（　　）

A.，在上是增函数

B.，在上是减函数

C.，是偶函数

$f(x)$

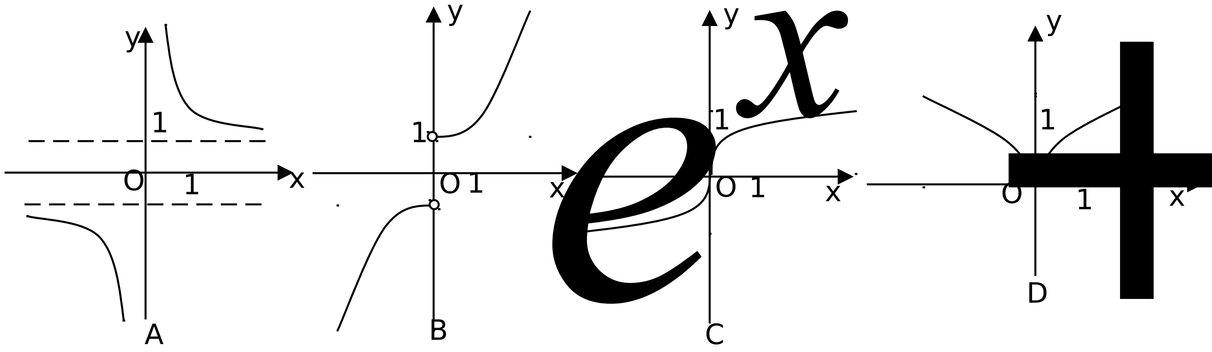
D.，是奇函数

答案　C

【命题意图】此题主要考查了全称量词与存在量词的概念和基础知识，通过对量词的考查结合函数的性质进行了交汇设问.

$f(x)=0$

解析　对于时有是一个偶函数



4.（2009 山东卷理）函数$y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$的图像大致为　　　　　　　　（　　）.

答案　A

$y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

$x>0$

解析 函数有意义,需使,其定义域为,排除C,D,又因为,所以当时函数为减函数,故选A.
【命题立意】:本题考查了函数的图象以及函数的定义域、值域、单调性等性质.本题的难点在于给出的函数比较复杂,需要对其先变形,再在定义域内对其进行考察其余的性质.

$$\log_2(1-x), x \leq 0$$

$$f(x-1)-f(x-2)$$

5.(2009山东卷理)定义在R上的函数f(x)满足f(x)= ,
则f（2009）的值为 ( )
A.-1 B. 0 C.1 D. 2
答案 C

$$f(-1)=\log_2 2=1,\ f(0)=0,\ f(1)=f(0)-f(-1)=-1$$

解析 由已知得,,,

$$f(2)=f(1)-f(0)=-1,\ f(3)=f(2)-f(1)=-1-(-1)=0$$

,,

$f(4)=f(3)-f(2)=$

$f(5)=f(4)-f(3)=$

$f(6)=f(5)-f(4)=$

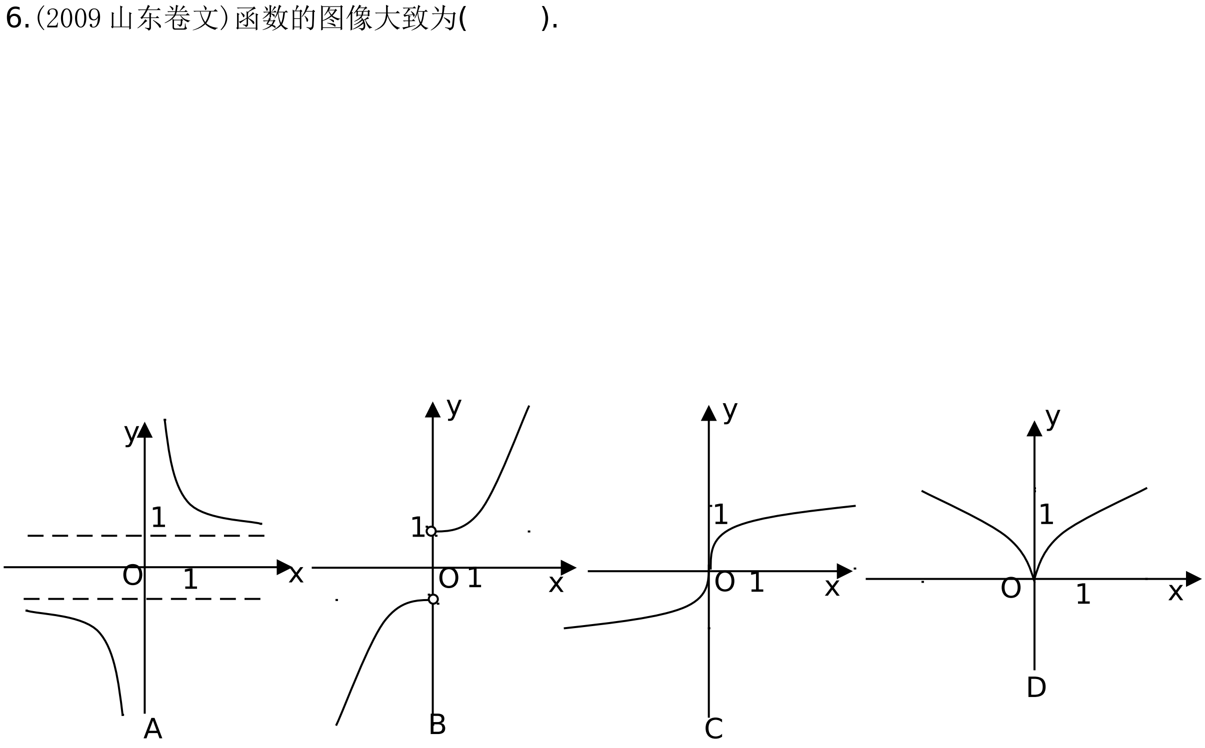
,,,

所以函数 f(x)的值以 6 为周期重复性出现.,所以 f（2009）= f（5）=1,故选 C.

【命题立意】:本题考查归纳推理以及函数的周期性和对数的运算.

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

6.(2009 山东卷文)函数的图像大致为(　　　).



答案　A.

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=1+\dots$$

$$e^x-e^{-x}\neq 0 \qquad x>0$$

解析　函数有意义,需使,其定义域为,排除 C,D,又因为,所以当时函数为减函数,故选 A.

【命题立意】:本题考查了函数的图象以及函数的定义域、值域、单调性等性质.本题的难点在于给出的函数比较复杂,需要对其先变形,再在定义域内对其进行考察其余的性质.

$$\begin{cases}\log_2(4-x), & \\ f(x-1)-f(x-2) & \end{cases}$$

7.（2009 山东卷文）定义在 R 上的函数 f(x)满足 f(**x)=** ，

则 f（3）的值为　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A.-1　　　　B. -2　　　　C.1　　　　D. 2

答案　B

$f(1)=f(0)-f(-1)=2$

$f(0)=1=\log$

解析　由已知得,,,

$f(3)=f(2)-f(1)=-\log_2 5-(2-\log$

$f(2)=f(1)-f(0)=-$

,,故选 B.

【命题立意】:本题考查对数函数的运算以及推理过程.

$f(x-4)=-f$

$f(x)$

8.(2009 山东卷文)已知定义在 R 上的奇函数，满足,且在区间[0,2]上是增函数,则 (　　).

A.　　B.

C.　　D.

答案　D

解析　因为满足,所以,所以函数是以 8 为周期的周期函数, 则,,,又因为在 R 上是奇函数，　,

得,,而由得,又因为在区间[0,2]上是增函数,所以,所以,即,故选 D.

【命题立意】:本题综合考查了函数的奇偶性、单调性、周期性等性质,运用化归的数学思想和数形结合的思想解答问题.

$$\sqrt{-?x}$$

9.（2009 全国卷Ⅱ文）函数 y=(x0)的反函数是　　　　　　　　　　　　　（　　）

$$y = 2x$$

（A）（x0）　　　　　（B）（x0）

（B）（x0）　　　　　　　　　　（D）（x0）

答案　B

解析　本题考查反函数概念及求法，由原函数 x0 可知 AC 错，原函数 y0 可知 D 错.

$$y=\log_2\frac{2-}{2}$$

10.（2009 全国卷Ⅱ文）函数 y=的图像　　　　　　　　　　　（　　）

$$y=-$$

（A） 关于原点对称　　　　　　　　（B）关于主线对称

$$yy=x$$

（C） 关于轴

对 称

（D）关于直线对称

答案 A

解析 本题考查对数函数及对称知识，由于定义域为（-2，2）关于原点对称，又 f(-x)=-f(x)，故函数为奇函数，图像关于原点对称，选 A。

$$a=\lg e, b=(\lg e)^2, c=$$

11.（2009 全国卷Ⅱ文）设则 （ ）

$a > b >$

$\frac{1}{2}$

（A）

（B）

（C）

（D）

答案 B

解析 本题考查对数函数的增减性，由1>lge>0, 知a>b, 又c=lge, 作商比较知 c>b, 选B。

$y=a^x(a>0$，且a

$y=f(x)$ $(\sqrt{a},a)$

12.（2009广东卷理）若函数是函数的反函数，其图像经过点，则

（　　）

$$\frac{\log_{1} x\, b^{2}}{2^{x}} \cdot$$

A.　　　　　　B.　　　　　　C.　　　　　　D.

答案　B

解析 ，代入，解得，所以，选 B.

$v_{甲}$ 0 和 v

13.（2009 广东卷理）已知甲、乙两车由同一起点同时出发,并沿同一路线（假定为直线）行驶．甲车、乙车的速度曲线分别为（如图 2 所示）．那么对于图中给定的，下列判断中一定正确的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. 在时刻，甲车在乙车前面

B. 时刻后，甲车在乙车后面

C. 在时刻，两车的位置相同

D. 时刻后，乙车在甲车前面

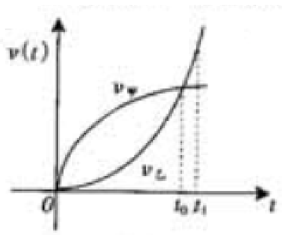


图 2

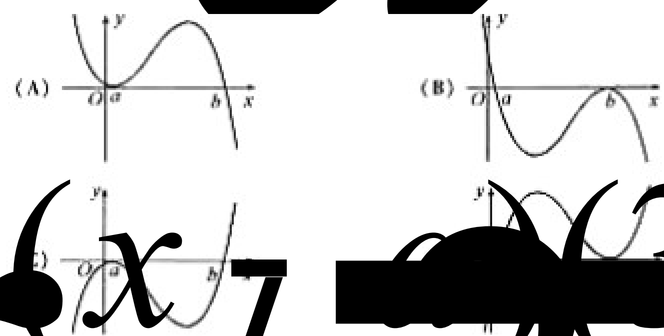
答案　A

解析　由图像可知，曲线比在 0～、0～与轴所围成图形面积大，则在、时刻，甲车均在乙车前面，选 A.

$y=(x-a)^2(x$

14．（2009 安徽卷理）设＜b，函数的图像可能是

（　　）



答案　C

$y'=(x-a)(3x-2a$

$x=a,\ x=\frac{2a+b}{3}$

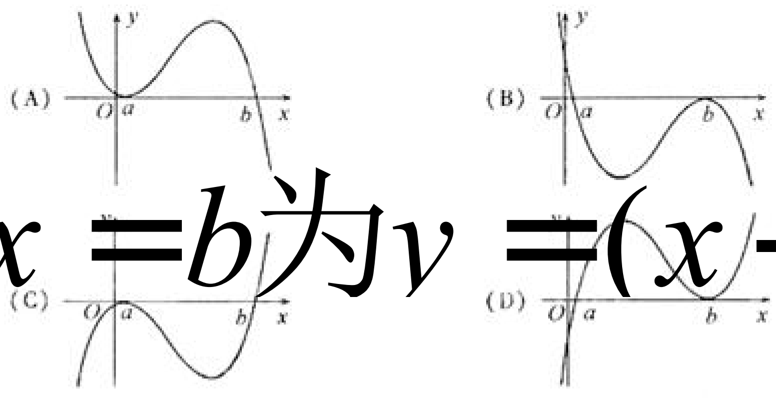
解析　，由得，∴当时，取极大值 0，当时取极小值且极小值为负。故选 C。

$$x = b$$

或当时，当时，选C

15.（2009 安徽卷文）设，函数的 $y=(x-a)^2(x-b)$ 图像可能是　　　　（　）

答案 C



$$x = a, x = b \text{为} y = (x - a)^2 (x$$

解析 可得的两个零解.

$x<b$ $f(x)$ $x<a$

当时,则

$a<x<b$ $f(x)<x$ $x>b$

当时,则当时,则选 C。

$$y=\frac{\sqrt{-x^{2}-3x}}{}$$

16.（2009江西卷文）函数的定义域为　　　　　　（　　）

$$[-4,0)\cup(0,1]$$

A.　　B.　　C.　　D.

答案　D

解析　由得或,故选 D.

17.（2009 江西卷文）已知函数是上的偶函数，若对于，都有，且当时，，则的值为

（　　）

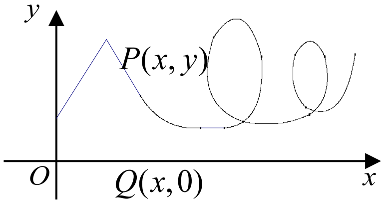
-2121

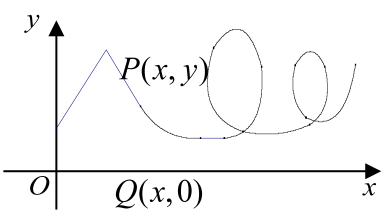
A.　　　　　　B.　　　　　　C.　　　　　　D.

答案　C

$$f(-2008)+f(2009)=f(0)+f(1)=\log$$

解析　, 故选 C.

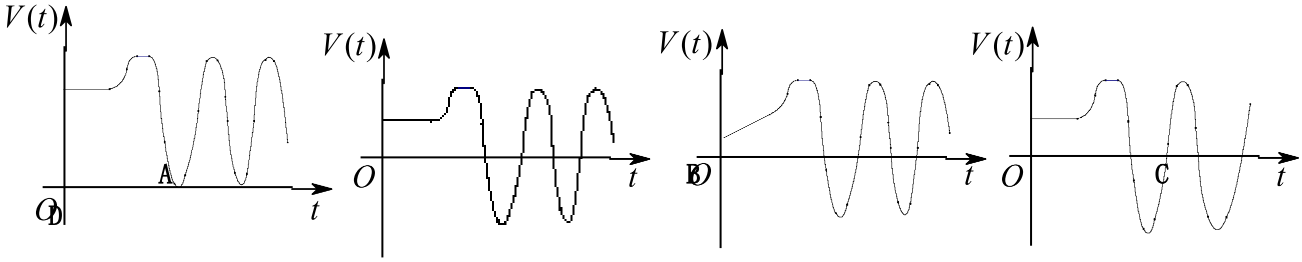




18.（2009 江西卷文）如图所示，一质点在平面上沿曲线运动，

速度大小不 变，其在轴上的投影点的运动速度的图象

大致为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)



答案　B

解析　由图可知，当质点在两个封闭曲线上运动时，投影点的速度先由正到0、到负数，再到0，到正，故错误；质点在终点的速度是由大到小接近0，故错误；质点在开始时沿直线运动，故投影点的速度为常数，因此是错误的，故选.

$$y=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{\cdots x^{2}\cdots 3x\cdots}}$$

19.（2009江西卷理）函数的定义域为 ( )

$$(-4,-1 \qquad (-4,1$$

A. B. C. D.

答案 C

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x^2-3x+4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ -4<x<1 \end{cases}$$

解析　　由.故选 C

$$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}\qquad (s,f(t))\qquad (s,t)\in D\qquad (a<0)$$

20.

（2009 江西卷理）设函数的定义域为，若所有点构成一个正方形区域，则的值为　　　　　　　　　　（　）

A.　　　　　　B.　　　　　　C.　　　　　D．不能确定

答案　B

解析　，，，，选B

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6, & x\geq 0\\ x+6, & x<0\end{cases}$$

$$f(x)>f(1)$$

21.（2009天津卷文）设函数则不等式的解集是（　）

$$(-3,1)\cup(3,+\infty)\qquad(-3,1)\cup(2,+\infty)$$

A.　　　　　　B.

$$(-1,1)\cup(3,+\infty)\qquad(-\infty,-3)\cup(1,3)$$

C.　　　　　　D.

答案　A

解析　由已知，函数先增后减再增

$$f'(x) \geq 0$$

当，令

$$x = 1, x =$$

解得。

$x+6=3, x=-$

$x<0$

当,

$f(2-x^2)>f(x)$

故，解得

【考点定位】本试题考查分段函数的单调性问题的运用。以及一元二次不等式的求解

22.（2009天津卷文）设函数f(x)在R上的导函数为f’(x),且2f(x)+xf’(x)>x,x下面的不等式在R内恒成立的是

(　　)

$$f(x)$$

A.　　　B.　　C.　　D.

答案　A

$$x=0$$

解析　由已知，首先令 ，排除 B，D。然后结合已知条件排除 C,得到 A

【考点定位】本试题考察了导数来解决函数单调性的运用通过分析解析式的特点，考查了分析问题和解决问题的能力。

$$y=\frac{1-ax}{1+ax}(x\in R,\text{且}x\neq-\frac{1}{a})\text{的反函数是}$$

23.(2009湖北卷理)设a为非零实数，函数(　　)

$$y=\frac{1+ax}{1-ax}(x\in R,\text{且}x$$

A、　　B、

$$y=\frac{1+x}{a(1-x)}(x\in R,\text{且}x$$

C、　　D、

答案　D

$$y=\frac{1-ax}{1+ax}(x\in R,\text{且}x$$

解析　由原函数是，从中解得

$$x=\frac{1-y}{a(1+y)}(y\in R,且y$$

即原函数的反函数是，故选择D

$$R\left(t\right)$$

24..（2009湖北卷理）设球的半径为时间 t 的函数。若球的体积以均匀速度 c 增长，则球的表面积的增长速度与球半径　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A.成正比，比例系数为 C　　　　B. 成正比，比例系数为 $2C$

C.成反比，比例系数为 C　　　　D. 成反比，比例系数为 $2C$

答案 D

$$c = V'(t) = 4\pi R^2(t)$$

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

解析 由题意可知球的体积为，则，由此可

$$S(t) = 4\pi R^2 \qquad \frac{c}{4\pi} \qquad R(t)R'(t)$$

，而球的表面积为，

$$v_{表} = S'(t) = 4\pi R^2(t) = 8\pi R$$

所以，

$$v_{表} = 8\pi R(t)R'(t) \quad 2 \cdot 4\pi R(t)R'(t) \quad \frac{2c}{R(t)R'(t)}$$

即，故选

$$f(x)$$

25.（2009 四川卷文）已知函数是定义在实数集 R 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数都有

$xf(x+1)=(1+x)$

$f(\frac{5}{2})$

，则的值是 （ ）

A. 0
B. C.
1
D.
答案 A

$$f(x+1)=\frac{1+x}{x}$$

$$x=-$$

$$2$$

解 析
若≠0，则有，
取，则有：

$$f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}+1) = \frac{1-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{}} f(-\frac{1}{2}) = -f(-$$

$$f(x)$$

$$f(-(\frac{1}{2})) = f($$

（∵是偶函数，则

）由此得于是

$$f(\frac{5}{2})=f(\frac{3}{2}+1)=\frac{1+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}f(\frac{3}{2})=\frac{5}{3}f(\frac{3}{2})=\frac{5}{3}f(\frac{1}{2}+1)=\frac{5}{3}[\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}]$$

$$f(x)=ax^2+bx+c($$

$$m[f(x)]^2+nf(x)+$$

$$x=-\frac{b}{2}$$

26.（2009 福建卷理）函数的图象关于直线对称。据此可推测，对任意的非零实数 a，b，c，m，n，p，关于 x 的方程的解集都不可能是

( )

A. B C D

答案 D

$m[f(x)]^2+nf(x)+$

解析　本题用特例法解决简洁快速，对方程中分别赋值求出代入求出检验即得.

$[f \; f(0, \; f(2x+1)$

$f\left(-\frac{}{3}\right)$

27.（2009辽宁卷文）已知偶函数在区间单调增加，则满足＜的x 取值范围是

(

)

（ A ）

（，） B.

[，） C.

（，） D.

[，）

答案 A

解析 由于f(x)是偶函数，故f(x)＝f(|x|)

∴得f(|2x－1|)＜f(),再根据f(x)的单调性

得|2x－1|＜ 解得＜x＜

28.（2009宁夏海南卷理）用min{a,b,c}表示a,b,c三个数中的最小值

( ) 设f（x）=min{, x+2,10-x} (x 0),则f（x）的最大值为

（A）4 （B）5 （C）6 （D）7

答案 C

$$f(x)=\sqrt{2x-4}(x$$

29.（2009 陕西卷文）函数的反函数为 （ ）

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^{2}+4(x$$

（A） B.

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^{2}+2(x$$

（ C ）

(D)学科

答案 D

解析 令原式 则 $y=f(x)=\sqrt{2x-4}(x\geq 2)$ $y^{2}=2x-4,\text{即}x=\frac{y^{2}+4}{2}=\frac{y^{2}}{2}+2$

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^{2}+2(x$$

故　　故选D.

$$x_1,x_2\in[0,+\infty)(x_1\ne x_2)$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$f(-x)$$

30.（2009陕西卷文）定义在R上的偶函数满足：对任意的，有.则（　　）

$$f(3)<f(-2)<$$

(A) B.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) < f(1) < f(0)$$

C. D.

答案 A

$$(x_2 - x_1)\left(f(x_2) - f(x_1)\right) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad f(x)$$

解析 由等价，于则在

$x_1, x_2 \in (-\infty, 0] (x_1$

$f(x)$

上单调递增, 又是偶函数, 故在

$x_1, x_2 \in [0, +\infty) (x_1$

单调递减. 且满足时, , , 得

$f(3) < f(-2) <$

,故选 A.

$f(x)$

31.(2009 陕西卷理)定义在 R 上的偶函数满足：对任意

$x_1, x_2 \in (-\infty, 0](x_1 \neq x_2)$

的，有.

n ? N

则当时,有 ( )

$f(n n)1)<<f(fn(-n1)<f($

(A) B.

$f(n+1)<f(n n)1)<<f($

C. C. D.

答案 C

解析：$x_1,x_2\in(-\infty,0](x_1\ne x_2)\Rightarrow(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1))>0$

$\therefore x_2>x_1$时，$f(x_2)>f(x_1)\Rightarrow f(x)$在$(-\infty,0]$为增函数

$f(x)$为偶函数$\Rightarrow f(x)$在$(0,+\infty]$为减函数

而n+1>n>n-1>0,\ $f(n+1)<f(n)<f(n-1)\Rightarrow f(n+1)<f(-n)<f(n-1)$

$$xf(x+1)=(1+x)f(x)$$

$$f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$$

32.（2009 四川卷文）已知函数是定义在实数集 R 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数都有，则的值是　　　　　　　　　　　（　　）

A. 0
B.
C. 1
D.
答案 A

$$f(x+1) = \frac{1+x}{x}$$

$$x = -$$

$$2$$

解析 若
≠0，则有，
取，则有：

$$f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}+1) = \frac{1-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \quad f(-\frac{1}{2}) = -f(-$$

$$f(\frac{1}{2}) =$$

（∵是偶函数，则 ）

由此得于是，

$$f(\frac{5}{2})=f(\frac{3}{2}+1)=\frac{1+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}f(\frac{3}{2})=\frac{5}{3}f(\frac{3}{2})=\frac{5}{3}f(\frac{1}{2}+1)=\frac{5}{3}[\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}]$$

$$y=\frac{1-2x}{1+2x}(x\in R,且x$$

33.（2009 湖北卷文）函数的反函数是　　　　　　　　　　（　　）

$$y=\frac{1-2x}{1+2x}(x\in R,且x$$

$$y=\frac{1+2x}{1-2x}(x\in R,且x$$

A.　　　　B.

$$y=\frac{1-x}{2(1+x)}(x\in R,且$$

$$y=\frac{1+x}{2(1-x)}(x\in R,且$$

C.　　　　D.

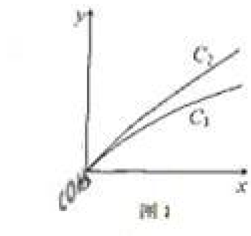
答案　D

$$x=\frac{1-y}{1+y}$$ 故 $f^{-1}(x)=$

解析　可反解得且可得原函数中 $y\in R$、$y\neq -1$ 所以且 $x\in R$、$x\neq -1$ 选 D

34.

(2009 湖南卷理)如图 1，当参数时，连续函数 的图像分别对应曲线和 ，则 (　　)



$0 < \lambda_1 <$

A　　B

$\lambda_1 < \lambda_2 <$

C　　D

答案　B

解析　解析由条件中的函数是分式无理型函数，先由函

数在是连续的，可知参数，即排除 C，D 项，又取，知对应函数值，由图可知所以，即选 B 项。

35.(2009 湖南卷理)设函数在（，+）内有定义。对于给定的正数 K，定义函数

( )

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & f(x \\ K, & f(x) > \end{cases}$$

取函数=。若对任意的，恒有=，则　　　　　(　　)

A. K 的最大值为 2　　　　　　　　B. K 的最小值为 2

C. K 的最大值为 1　　　　　　　　D. K 的最小值为 1

答案　D

解析　　由知，所以时，，当时，，所以即的值域是，而要使在上恒成立，结合条件分别取不同的值，可得 D 符合，此时。故选 D 项。

36.（2009 天津卷理）已知函数若则实数

的取值范围是

( )

A B C D

【考点定位】本小题考查分段函数的单调性问题的运用。以及一元二次不等式的求解

解析：由题知在上是增函数，由题得，解得，故选择 C。

$$xf(x+1)=(1+x)$$

37.（2009 四川卷理）已知函数是定义在实数集上的不恒为零的偶函数，且对任意实数都有，则的值是　　　　　　　　　　　　　　(　　)

A.0

B.

C.1

D.

【考点定位】本小题考查求抽象函数的函数值之赋值法，综合题。（同文12）

$$\frac{1}{2} \quad \frac{5}{2}$$

答案 A

$$-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})\Rightarrow$$

$$f(0)=$$

$$x$$

$$x=-$$

解析　令，则；令，则

$$xf(x+1)=(1+x)f(x)$$

$$f(x+1)=\frac{\quad}{x}$$

由得，所以

$$f(\frac{5}{2})=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}f(\frac{3}{2})=\frac{5}{3}f(\frac{3}{2})=\frac{5}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}f(\frac{1}{2})=0\Rightarrow f(f($$

，故选择 A。

$$y = \frac{1}{\sqrt{}}$$

38.（2009福建卷文）下列函数中，与函数 有相同定义域的是 （ ）

$f(x)=\ln$

$f(x)=$

$f(x)=$

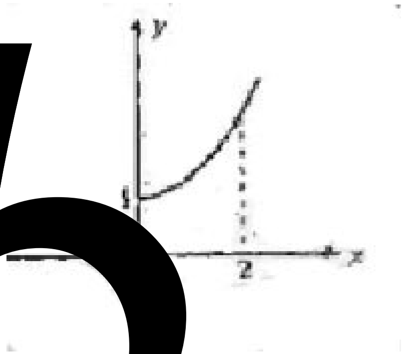
$f(x)$

A .　B.　C.　D.

答案　A

解析　解析 由可得定义域是的定义域；的定义域是≠0；的定义域是定义域是。故选 A.

$(f(2,x0)$



39.（2009 福建卷文）定义在 R 上的偶函数的部分图像如右图所示，则在上，下列函数中与的单调性不同的是　　　　　　　　　　　　　　（　　）

$y=x^2-$

A.

$$y=|x|-$$

B.

$$y=\begin{cases}2x+1, & x \\ x^{3}+1, & x\end{cases}$$

C.

$$y = \begin{cases} ?^{x}, & x ? \\ ?^{-x}, & x \end{cases}$$

D.

答案 C

解析　解析 根据偶函数在关于原点对称的区间上单调性相反，故可知求在上单调递减，注意到要与的单调性不同，故所求的函数在上应单调递增。而函数在上递减；函数在时单调递减；函数在（上单调递减，理由如下 $y'=3x^2>0(x<0)$,故函数单调递增，显然符合题意；而函数，有 $y'=-<0(x<0)$,故其在（上单调递减，不符合题意，综上选 C。

$f(x)=x^3-$

$u\ C>0$

40.（2009重庆卷文）把函数的图像向右平移个单位长度，再向下平移个单位长度后得到图像．若对任意的，曲线与至多只有一个交点，则 的最小值为（　　）

A.　　B．　C.　　D.

答案　B

$v=(x-u)^3-3(x-u$

解析　　根据题意曲线 C 的解析式为则方程

$(x-u)^3-3(x-u)-v=$

$3ux^2(u^3-1-3u+v$

$v \geq -\frac{1}{4}u^3+$

，即，即对任意

$g(u)=-\frac{1}{4}u^3+3u(u$

$v \geq -\frac{1}{4}u^3+$

恒成立，于是的最大值，令则

$$g(u) = -\frac{3}{4}u^2 + 3 = -\frac{3}{4}(u-2$$

由此知函数在（0，2）上为增函数，在上为减函数，所以当时，函数取最大值，即为 4，于是。

$$f(x) = a + \frac{1}{2^x - 1}$$

41.（2009 重庆卷理）若是奇函数，则____________.

答案

$$\frac{1}{2}$$

$$f(-x)=\frac{1}{2^{-x}-1}+a=\frac{2^x}{1-2^x}+a, f(-x$$

解 析

解法1

$$\frac{2^x}{1-2^x}+a=-(\frac{1}{2^x-1}+a) \quad 2a=\frac{1}{1-2^x}-\frac{2^x}{1-}$$

42（2009上海卷文）函数 $f(x)=x^3+1$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______________.

$$\sqrt[3]{x -}$$

答案

解析　由$y=x^3+1$，得$x=$，将y改成x，x改成y可得答案

44（2009北京文）已知函数若，则＿＿＿＿＿＿.

$\log_3 2$

答案

解 析

本 题 主 要 考 查 分 段 函 数 和 简 单 的 已 知 函 数 值 求 的 值. 属 于 基 础 知 识、基 本 运算的考查.

x

由，无解，故应填.

45.（2009北京理）若函数 则不等式的解集为___________.

$[-3,1$

答案

解析　本题主要考查分段函数和简单绝对值不等式的解法. 属于基础知识、基本运算的考查.

$$|f(x)| \ \frac{1}{3} \ \ \begin{cases} x<0 \\ \ \frac{1}{x} \end{cases} \left| \ \frac{1}{2} \ -3 \right.$$

（1）由.

（2）由.

∴不等式的解集为，∴应填.

46.（2009 江苏卷）已知，函数，若实数、满足，则、的大小关系为________.

解析　　考查指数函数的单调性。

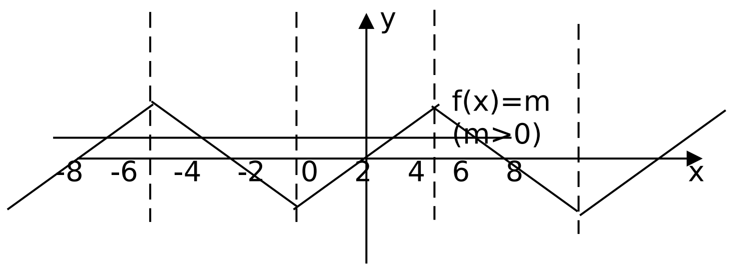
，函数在 R 上递减。由得：m<n

$$x_1+x_2+x_3+x_4=$$

47.(2009 山东卷理)已知定义在 R 上的奇函数，满足,且在区间[0,2]上是增函数,若方程 f(x)=m(m>0)在区间上有四个不同的根,则

答案　-8

解析　因为定义在 R 上的奇函数，满足,所以,所以, 由为奇函数,所以函数图象关于直线对称且,由知,所以函数是以 8 为周期的周期函数,又因为在区间[0,2]上是增函数,所以在区间[-2,0]上也是增函数.如图所示,那么方程 f(x)=m(m>0)在区间上有四个不同的根,不妨设由对称性知所以



【命题立意】:本题综合考查了函数的奇偶性,单调性,对称性,周期性,以及由函数图象解答方程问题,运用数形结合的思想和函数与方程的思想解答问题.

14.（2009 四川卷文）设是已知平面上所有向量的集合，对于映射，记的象为。若映射满足：

对所有及任意实数都有，则称为平面上的线性变换。现有下列命题：

$f(a+b)=f(a)+$

a、M f b ?

① 设是平面上的线性变换，，则

a ? V，设 $f(a)=a$

M f e

② 若是平面上的单位向量，对，则是平面上的线性变换；

$a ? V$ 设 $f(a) =$

M

y

③ 对，则
是平面上的线
性变换；

$f(ka) = kf($

a M $? V$

y

④ 设是平

面上的线性变换，，则对任意实数均有。

其中的真命题是______________________（写出所有真命题的编号）

答案　　①③④

$$f(a+b)=f(a)+$$

$$\lambda=\mu=$$

解析　　①：令，则故①是真命题

$$\lambda(ka)=kf$$

同理，④：令，则故④是真命题

$$f(b)=$$

③：∵，则有

$$f(\lambda a+\mu b)=-(\lambda a+\mu b)=\lambda\cdot(-a)+\mu\cdot(-b)=\lambda$$

是线性变换，故③是真命题

$$f(b)=b+$$

②：由，则有

$$f(\lambda a+\mu b)=(\lambda a+\mu b)+e=\lambda\cdot(a+e)+\mu\cdot(b+e)-e=\lambda$$

∵是单位向量，

≠0，故②是假命题

$$e$$

【备考提示】本小题主要考查函数，对应及高等数学线性变换的相关知识试题立意新颖，突出创新能力和数学阅读能力，具有选拔性质

48.(2009年广东卷文)（本小题满分14分）

已知二次函数的导函数的图像与直线平行,且在=－1 处取得最小值 m－1(m).设函数

$y=f($

$\sqrt{2}$

(1)若曲线上的点P到点Q(0,2)的距离的最小值为,求m的值

(2) 如何取值时,函数存在零点,并求出零点.

解　（1）设，则；

又的图像与直线平行

$$b\ b\left(=-x^{2}+\right)$$

$$g\ 2$$

又在取极小值，，

$$\backslash\ g\left(-1\right)=a-b+c=1-2+c$$

$$c=m$$

，；

$f(x)=\frac{g(x)}{x}=x+$

$P(x_0, y_0)$

，设

$|PQ|^2 = x_0^2 + (y_0 - 2)^2 = 2x_0^2 + \frac{m^2}{x_0^2} + 2$

则

$\backslash \quad 2\sqrt{2m^2} + 2$

$m =$

;

$y = f\left(x\right) - kx = \left(1 - k\right)x + \frac{m}{x}$

（2）由，

$$\left(1-k\right)x^2+2x+m$$

$$\left(*\right)$$

得

$y=f(x)$

当时，方程有一解，函数有一零点；

$\Delta = 4 - 4m(1 - k$

当时，方程有二解，若，，

$$x=\frac{-2 ? \sqrt{4-4m(1-k)}}{2(1-k)}=\frac{1 ? \sqrt{1-}}{-k}$$

$$y=f(x)-k$$

$$m<0$$

$$x=\frac{-2 ? \sqrt{4-4m(1-k)}}{2(1-k)}=\frac{1 ? \sqrt{1-}}{-k}$$

$$y=f(x)-k$$

$$k<1-$$

函数有两个零点；若，

，函数有两个零点；

当时，方程有一解，，函数有一零点

$f(x)=x^3-(k^2-k+1)x^2$

$g(x)=k^2x^2+k$

49.（2009浙江理）（本题满分14分）已知函数，，

k ? R

其中.

$p(x)=f(x)+g$

$(0,3)$ $p(x)$

（Ⅰ）设函数．若在区间上不单调，求的取值范围；

$$q(x)=\begin{cases} g(x), & x \\ f(x), & x \end{cases}$$

（Ⅱ）设函数 是否存在，对任意给定的非零实数，存在惟一

x_1

$q(x_2)=$

x_2

的非零实数（），使得成立？若存在，求的值；若不

存

在，请说明理由.

$p(x)=f(x)+g(x)=x^3+(k-1)x^2$

$(0,3)$

解 (I) 因，，因在区间上不单调，所以在上有实数解，且无重根，由得

，令有，记则在上单调递减，在上单调递增，所以有， 于是，得，而当时有在 上有两个相等的实根，故舍去，所以；

$$q(x)=f(x)=3x^2-2(k^2-k$$

$$x<0$$

（II）当时有；

$$q(x)=g(x)=2k^2$$

$$x\ge 0$$

当时有，因为当时不合题意，因此，

下面讨论的情形，记A，B=（ i ）当时，在上单调递增，所以要使成立，只能且，因此有，（ii）当时，在上单调递减，所以要使成立，只能且，因此，综合（ i ）（ii）；

"

当时

A=B，则，即使得成立，因为在上单调递增，所以的值是唯一的；

同理，，即存在唯一的非零实数，要使成立，所以满足题意.

7.（2009 江苏卷）(本小题满分 16 分)

$$f(x)=2x^2+(x-a)|$$

设为实数，

函数.

(1)若，求的取值范围；

$$f(x$$

(2)求的最小值；

$$h(x)=f(x),x\ ?\ (a$$

$$h(x)\ ?$$

(3)设函数，直接写出(不需给出演算步骤)不等式的解集.

解　本小题主要考查函数的概念、性质、图象及解一元二次不等式等基础知识，考查

灵活运用数形结合、分类讨论的思想方法进行探索、分析与解决问题的综合能力。满分16分

（1）若，则

（2）当时，

$f(x)_{\min} = f(-a, a) = 0$

当时，

$f(x)_{\min} = \begin{cases} 2a^2, \\ 2a^2, \end{cases}$

综上

$3x^2 \; ax + a^2$

$h(x)$

（3）时，得，

$\Delta = 4a^2 - 12(a^2 - 1) = 12$

$\Delta \; 0 \; \sqrt{6} \; (a,$

$a \; - \; \text{或} \; a$

当时，；

$$(x-\frac{a-\sqrt{3-2a^2}}{3})(x-\frac{a+\sqrt{3-}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}<a<$$

当时，△>0,得：

$$(a\ ,\ (\ \sqrt{2}+\ ,$$

讨　　论　　得　　：　　当　　时　　，　　解　　集　　为　　；

$(a, \frac{a-\sqrt{3-2a^2}}{2}] \cup [\frac{a+\sqrt{3-2a^2}}{2}$

$a ? (-\frac{\sqrt{6}}{2}, -$

当 时，解集为；

$[\frac{a+\sqrt{3-2a^2}}{2}, \sqrt{}$

$a ? [-\frac{\sqrt{2}}{2}, -$

当 时，解集为.

50.（ 2009 年 上
海卷理）已知函
数的反函数。定义：若对给定的实数，函数与互为反函数，则称满足“和性质”；若函数
与互为反函数，则称满足“积性质”。

$$g(x)=x^{2}+1(x$$

（1） 判断函数是否满足“1 和性质”，并说明理由；

（2） 求所有满足“2 和性质”的一次函数；

$$y=f(x)(x$$

$$y=a\ (a>0$$

（3） 设函数对任何，满足“积性质”。求的表达式。

$$g^{-1}(x)=x^2+1\ (x$$

解 （1）函数的反函数是

$$\therefore\ g^{-1}(x+1)=\sqrt{x}\ (x$$

$g(x+1)=\sqrt{(x+1)^2+1}(x$

$y=\sqrt{x-1}-1(x$

而其反函数为

$g(x)=x^2+1(x$

故函数不满足“1 和性质”

$f(x)=kx+b(x$

$k \neq 0$

（2）设函数满足“2 和性质”，

$\therefore\ f^{-1}(x)=\frac{x-b}{k}(x \in R),\therefore\ f^{-1}(x+2)$

.......6 分

$$f(x+2)=k(x+2)+b(x$$

$$y=\frac{x-b-2}{k}$$

而得反函数............8 分

由“2和性质”定义可知=对恒成立

即所求一次函数为………..10分

（3）设，，且点在图像上，则在函数图象上，

$$ay_0 = f(x_0) = af($$

$$f(ax_0) =$$

故，可得， . . . . . . 12 分

$$f^{-1}(ay_0) =$$

令，则。，即。　　　．．．．．．14分

综上所述，，此时，其反函数就是，

而，故与互为反函数 。

2005—2008年高考题

一、选择题

$f(x) = \cdots x^2, \quad 1, \quad \cdots + x - 2, \cdots$

$f\left(\dfrac{\cdots}{f(2)}\right)$

1.（2008年山东文科卷 … 值为

1887

–

1966

A.　　　　B.　　　　　　C.　　　　　D.

答案　A

2.（07 天津）在上定义的函数是偶函数，且，若在区间　　是减函数，则函数

（　　）

$$\left[-3,2 4\right]$$

A. 在区间上是增函数，区间上是增函数

$$\left[-3,24-\right]$$

B. 在区间上是增函数，区间上是减函数

$$\left[-3,24-\right]$$

C. 在区间上是减函数，区间上是增函数

$$\left[-3,2\,4-\right]$$

D. 在区间上是减函数，区间上是减函数

答案 B

3. (07福建)已知函数为R上的减函数，则满足的实数的取值范围是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

$(0,1)$ $(1$

A. B.

$(-\infty,-1)\cup(1$ $(-1,0)\cup(0$

C. D.

答案 C

4.(07重庆)已知定义域为R的函数在区间上为减函数，且函数为偶函数，则（　　）

$f(6) > f($

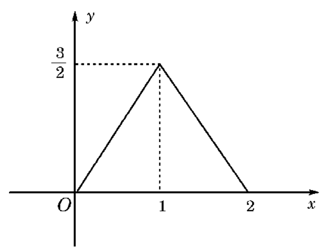
A.　　　　　　　　　　B.

$$f(7) > f(f($$

C. D.

答案 D

5.（07 安徽）图中的图象所表示的函数的解析式为 （ ）



$$y=\frac{3}{2}|x-$$

A. （0≤x≤2）

$$y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}|x$$

B. $(0 \leqslant x \leqslant 2)$

$$y = \frac{3}{2} - |x -$$

C. $(0 \leqslant x \leqslant 2)$

$$y = 1 - |x -$$

D. (0≤x≤2)

答案 B

$f(x)=\frac{1}{2^{x}\cdots}$

6.（2005年上海13）若函数，则该函数在上是 （ ）

A．单调递减；无最小值 B．单调递减；有最小值

C．单调递增；无最大值 D．单调递增；有最大值

答案 A

二、填空题

$f(-2)+f(-1)-3=f(1)+\cdots$

$y=f(\cdots$

7.（2007上海春季5）设函数是奇函数．若

$$f(1) + f(2$$

则____.

$$-3$$

答案

$$y=\frac{\lg(4-}{x}$$

8.（**2007年上海**）函数的定义域是______________.

$$\left\{x \mid x<4\ 且\ x\right.$$

答案

$$f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$$

$$f(1)=-5$$

9.（2006年安徽卷）函数对于任意实数满足条件，若 则 ______________。

答案 -

$$f\left(f\left(5\right)\right)=f(-5)=f(-1)=\frac{1}{f(-1\ldots}$$

解析 。

10.（2006年上海春）已知函数是定义在上的偶函数. 当时，

，则当时，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

答案　$-x-x^4$

三、解答题

$f(x)=2ax^2+2x-$

$y=f(x)$

11.(2007广东）已知 a 是实数，函数，如果函数在区间

$[-1,1]$

上有零点，求 a 的取值范围.

$f(x)$

$a+1,$

解析　若，　，显然在上没有零点，所以．

$$\Delta = 4 + 8a(3+a) = 8a^2 + 24a$$

$$a = \frac{-3 \; ?}{2}$$

令，　解得

① 当 时， 恰有一个零点在上；

$$f(-1)\cdot f(1)=(a-1)(a-$$

② 当，即时，在

$\left[-1,1\right.$

上也恰有一个零点.

$a \neq 0$

$\Delta = 8a^2 + 24a$

$-1 < -\dfrac{1}{2a} <$

$f(1) \geq 0$

③ 当在上有两个零点时，则

或

解得或

综上所求实数的取值范围是或.

第二部分　三年联考汇编

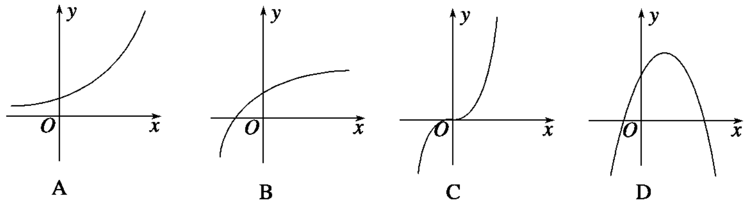
2009年联考题

一、选择题

$$g(x)=f(x+a)-$$

1.（北京市东城区2009年3月高中示范校

高三质量检测文理) 函数的定义域是，若对于任意的正数，函数都是其定义域上的增函数，则函数的图象可能是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）



答案　A

2.（2009 龙岩一中）函数的定义域是　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A.　　　　　B.　　　　C.　　　D.

答案　B

$f(x) = f(-x)$

3.（2009 湘潭市一中 12 月考）已知定义在 **R** 上的函数满足，且

$f(1)+f(2)+\ldots+f(2008)+f(\ldots$

$f(-2)=f(-1)$

$f(0)=$

，，（　　　）

$-0\ 1\ 2\ 1$

A.

B.

C. D.

答案 A

$$R \quad f\left(x\right)$$

4.（2009 广东三校一模）定义在上的函数是奇函数又是以为周期的周期函数, 则

$$f\left(1\right)+f\left(4\right)+f$$

等于　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. -1　　　　　　B. 0　　　　　　C. 1　　　　　　D. 4

答案　B

5.（安徽省合肥市2009届高三上学期第一次教学质量检测）函数在上单调，则的取值范围是（　　）

A.　　　　B.

$\left[1,\sqrt{2}\right.$ $\left(1,\sqrt{2}+\right.$

C.　　　　　　　　　　　　　　　　D.

答案　A

$f(x)=\lg$

6.（黄山市2009届高中毕业班第一次质量检测）对于函数定义域中任意

$f(x_1+x_2)=f(x_1)+$

$(x_1, x_2$

x_1, x_2

有如下结论：①；

$f(x_1 x_2)=f(x_1)+$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

②； ③；

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+\ldots}{2}$$

④。上述结论中正确结论的序号是　　　　　（　　）

A．②　　　B．②③　　　C．②③④　　　D．①②③④

答案　B

7.（福州市普通高中2009年高中毕业班质量检查）已知函数

$$f(x)=\begin{cases}8x-8 & (x\le 1)\\ x^2-6x+5 & (x>1)\end{cases},\ g(x)=\ln x.\text{则}$$

两函数的图像的交点个数为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A．1　　　　　　B．2　　　　　　C．3　　　　　　D．4

答案　B

8.（福州市普通高中2009年高中毕业班质量检查）已知

$$f(x)(x\ne 0,x\in R)\text{是奇函数},\text{当}x<0\text{时},f'(x)>0$$

，则不等式

$$f(x)>$$

的解集是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

$(2,+\infty$

A. （—2，0）　　B.

$(-\infty,-2)\cup(0,2)$ $(-2,0)\cup(2,+$

C.　　D.

答案　C

9.（江
门 市
2009年高考模拟考试）设函数的定义域为，的定义域为，则
（ ）

A. B. C. D.

答案 C

$$f(x)=\frac{1}{1}$$

10．（2009年深圳市高三年级第一次调研考试数学（文科））设，又记

$$f_1(x)=f(x),\ f_{k+1}(x)=f(f_k(x)),\ k$$

$$f_{2009}(x)$$

则　　　　　　（　）

$$\frac{x+1}{x-1}$$

A.　　　　　　B.　　　　　　C.　　　　D.

答案　D

$f(x)$

$\frac{\pi}{2}$

θ

11.（银川一中2009届高三年级第一次模拟考试）设函数是奇函数，并且在R上为增函数，若0≤≤时，f（$m$sin）+f（1—m）>0恒成立，则实数m的取值范围是（　）

$$(-\infty,\frac{1}{2}$$

A．（0，1）B．（－∞，0）C． D．（－∞，1）

答案　D

二、填空题

$f(x)$ $\mathbb{R}$

12．（2009年龙岩市普通高中毕业班单科质量检查）已知函数为上的奇函数，

当时，.若，则实数 .

答

案

13.(**银川一中2009届高三年级第一次模拟考试**)给出定义：若(其中为整数)，则叫做离实数最近的整数，记作，即.在此基础上给出下列关于函数的四个命题：

①函数的定义域是R，值域是[0，]；

$$y=f(x$$

$$x=\frac{k}{2}\ (k\in$$

②函数的图像关于直线对称；

$$y=f(x$$

③函数是周期函数，最小正周期是1；

④ 函数在上是增函数；

则其中真命题是__　　.

答案　①②③

$$f\left(x\right)=\begin{cases} ?x^{2}, x \text{ p} \\ ? \\ ?x+1, x \end{cases}$$

14.（安徽省示范高中皖北协作区2009年高三联考）已知函数，则不

$$f\left(x\right) \text{ f}$$

等式的解集为___________

$$(-\infty,2)\cup(3,+$$

答案

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & (x\le \ldots \\ x^2 & (-1<\ldots\end{cases}$$

$$f(-\ldots)=\ldots \quad a$$

$$f(a)<\ldots$$

15.**(北京市石景山区2009年4月高三一模理)**函数，则，若，则实数的取值范围是____

$$\frac{1}{2};(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ldots$$

答案

$f(x)=x^2-4x$

16. **（北京市西城区2009年4月高三一模抽样测试文）**设 a 为常数，.

$f(x+a$ $f(f(a$

若函数为偶函数，

则=＿＿＿＿＿＿

=＿＿＿＿.

答案　2,8

$y = mx^2 + x +$

$[-2, +$

17.（**2009丹阳高级中学一模**）若函数在上是增函数，则的取值范围是____________。

$$0 \le m \le$$

答案

三、解答题

$$f(x) = |x - 1| + |x$$

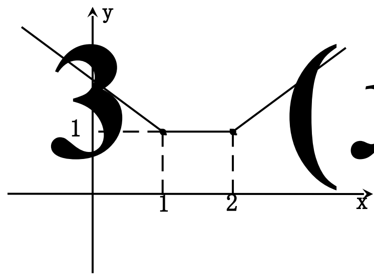
18.**(银川一中2009届高三年级第一次模拟考试)**设函数。

（1）画出函数y=f(x)的图像；

$$|a + b| + |a - b| \ge |a|$$

（2）若不等式，（a0,a、bR）恒成立，求实数x的范围。

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & (x\ge 2 \\ 1 & (1<\end{cases}$$



解：(1)

(2)由|a+b|+|a-b|≥|a|f(x)

$$\frac{|a+b|+|a-b|}{|a|}\ge$$

得

$$\frac{|a+b|+|a-b|}{|a|}\ge\frac{|a+b+a}{|a|}$$

又因为

则有 2≥f(x)

解不等式　2≥|x-1|+|x-2|

$\frac{1}{2} \leq x \leq$

得

2007—2008年联考题

一、选择题

$$f(x)$$

1.(陕西长安二中2008届高三第一学期第二次月考)定义在R上的偶函数满足

$$f(x+1)=-f(x)$$

$$a=f($$

$$b=f($$

，且在[-1，0]上单调递增，设，，，

a, b, c

则大小关系是 （ ）

$a > b >$

A. B.

C. D.

答案 D

$$y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$$

2.(陕西长安二中2008届高三第一学期第二次月考)函数是　（　　）◆A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 非奇非偶函数

答案　D

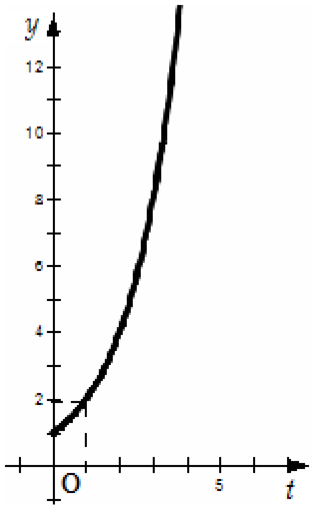
3.(陕西长安二中2008届高三第一学期第二次月考)设f(x)是定义在R上的函数，且在(-∞，+∞)上是增函数，又F(x)=f(x)-f(-x)，那么F(x)一定是　（　　）

A. 奇函数，且在(-∞，+∞)上是增函数　　B. 奇函数，且在(-∞，+∞)上是减函数

C. 偶函数，且在(-∞，+∞)上是增函数　　D. 偶函数，且在(-∞，+∞)上是减函数

答案　A

4.(广东省2008届六校第二次联考)如图所示是某池塘中浮萍的面积



$y=f(t)=2$

$y(m$

与时间(月)的关系:，有以下叙述:

① 这个指数函数的底数为2;

$$m^2$$

② 第 5 个月时，浮萍面积就会超过 30；

$$m^2$$

③浮萍从 4 蔓延到 12 需要经过 1.5 个月;
④浮萍每月增加的面积都相等;

$$t_1 m t_2^2, t$$

⑤若浮萍蔓延到2，3，6所经过的时间分别是，

$$t_1 + t_2 =$$

则. 其中正确的是　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A. ①②　　　　　　B. ①②③④　　　　　　C. ②③④⑤　　　　D. ①②⑤

答案　D

5.（**2007 届岳阳市一中高三数学能力题训练**）. 映射 f：A→B，如果满足集合 B 中的任意一

个元素在 A 中都有原象，则称为“满射”。已知集合 A 中有 4 个元素，集合 B 中有 3 个元素，那么从 A 到 B 的不同满射的个数为　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. 24　　　　B. 6　　　　C. 36　　　　D. 72

答案　C

二、填空题

6.（**2007 届岳阳市一中高三数学能力题训练**）若对于任意 $a \in [-1,1]$，函数 $f(x) = x^2 + (a-4)x + 4-2a$ 的值恒大于零，则 x 的取值范围是

$$(-\infty, 1) \cup (3,$$

答案　（

$$f(x) = |x^2 - ax - b| (x \in R$$

7.(**2007 年江苏省南京师范大学附属中学**) 已知函数，给出以下三个条件:

$f(-x_0)$ $f($

x_0

(1) 存在，使得；

$f(3)=f($

(2) 成立；

$$\lceil f d(,x+)$$

(3) 在区间上是增函数.

$$f(x)$$

若同时满足条件______和______（填入两个条件的编号），则的一个可能的解析式为
.

$$y=|x^{2}+3x$$

答案　满足条件(1)(2)时,等；满足条件(1)(3)时,等；满足条件(2)(3)时,等.

三、解答题

$f(x-y)=f(x)g(y)-g($

8.(**2007年安徽省六校**)已知函数,在R上有定义，对任意的有　且

$$f(x)$$

（1）求证：为奇函数

$$f(1)=$$

$$g(1)+g(f($$

（2）若， 求的值

$x ? R$

解（1）对，令 x=u-v 则有 f(-x)=f(v-u)=f(v)g(u)-g(v)f(u)=f(u-v)=-[f(u)g(v)-g(u)f(v)]=-f(x) ··················4 分

（2）f(2)=f{1-(-1)}=f(1)g(-1)-g(1)f(-1)=f(1)g(-1)+g(1)f(1)=f(1){g(-1)+g(1)}

∵f(2)=f(1)≠0

∴g(-1)+g(1)=1 ·····················8 分

第二节　　基本初等函数Ⅰ

第一部分　五年高考荟萃

2009 年高考题

1.(2009年广东卷文)若函数是函数的反函数，且，则

( )

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}}{2^{x^2}}$$

A.　　B.　　C.　　D．2

答案　A

$y=a^{x}(a>0$, 且 $)$

$f(x)=\log$

解析　函数的反函数是,又,即,

$f(x)=\log$

$a=2$

所以,,故,选 A.

$$y=\lg \qquad y=\lg x \qquad 10$$

2.（2009 北京文）为了得到函数的图像，只需把函数的图像上所有点　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. 向左平移 3 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

B. 向右平移 3 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

C. 向左平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

D. 向右平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度

答案　C

解析　本题主要考查函数图象的平移变换．属于基础知识、基本运算的考查.

$$a=\log_{\frac{1}{\ }}2,\ b=\log_{\frac{1}{\ }}3,\ c=$$

3.（2009 天津卷文）设，则　　　　　　　（　）

A a<b<c　B a<c<b　C b<c<a　D b<a<c

答案　B

解析　由已知结合对数函数图像和指数函数图像得到，而，因此选 B。

【考点定位】本试题考查了对数函数和指数函数的性质运用，考查了基本的运算能

$$y=2^{x+1}(x\in$$

4.（2009 四川卷文）函数的反函数是

$$y=\log_2 x-1\ (x>0) \qquad y=\log_2(x-1)\ (x>1)$$

A.　　　　　B.

$$y=-1+\log_2 x\ (x>0) \qquad y=\log_2(x+1)\ (x>-1)$$

C.　　　　　D.

答案　**C**

$$y = 2^{x+1} \Rightarrow x + 1 = \log_2 y \Rightarrow x = -$$

$$y > 0$$

解析　　由，又因原函数的值域是，

$$y = -1 + \log_2 x(x$$

∴其反函数是

$$a = \log_3 \pi, b = \log_2 \sqrt{3}, c =$$

5.（2009全国卷Ⅱ理）设，则

$a > b >$

A. B. C. D.

答案 A

$$Q \log_3 \sqrt{2} < \log_2 \sqrt{2} < \log_2 \sqrt{3}$$

解析

$$\log_2 \sqrt{3} < \log_2 2 = \log_3 3 < \log_3 p \backslash \quad a > b$$

.

$$\log_2 \sqrt{\ }$$

6.（2009湖南卷文）的值为

$$-\frac{\sqrt{12}}{2}$$

A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

答案　D

$$\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log$$

解析　由,易知 D 正确.

$$f_K(x)=$$

7.（2009 湖南卷文）设函数在内有定义，对于给定的正数 K，定义函数

取函数。当

=时，函数的

单调递增区间

为

( )

A． B． C． D．

答案 C

解析 函数，作图易知，

故在上是单调递增的，选 C.

8.（2009 福建卷理）下列

函数中，满足“对任意，（0，），当<时，都有>

的是

$$(f x 1(1-x 1))$$

A . =

B. =

$$x$$

$f(x)=\ln(x$

$f(x)$ e (x)

C .= D.

答案 A

$x \in (0,+$

解析　依题意可得函数应在上单调递减，故由选项可得 A 正确

$$f\left(\frac{1}{2}\right)(x_x)$$

9．（2009 辽宁卷文）已知函数满足：x≥4, 则＝；当 x＜4 时＝

$f(2+\log$ $f(4(x+$

，则＝

$$\frac{3\,1}{2\,1\,8\,2\,4}$$

A.　　　　　　　　B.　　　　　　C.　　　　　　　　D.

答案　A

解析　　∵3＜2＋log₂3＜4,所以 f(2＋log₂3)＝f(3＋log₂3)且 3＋log₂3＞4

$$f(2+\log_2$$

∴＝f(3＋log₂3)

$$(\frac{1}{2})^{3+\log_2 3} = \frac{1}{8} ? (\frac{1}{2})^{\log_2 3} = \frac{1}{8} ? (\frac{1}{2})^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}} =$$

＝

$$y = 2^{x+1}(x \in$$

10.（2009 四川卷文）函数的反函数是

$$y = \log_2 x - 1(x$$

A.　　　　　　B.

$y = \log_2(x-1)(x>1)$

C. D.

答案 **C**

$y = 2^{x+1} \Rightarrow x+1 = \log_2 y \Rightarrow x = -$

$y > 0$

解析 由，又因原函数的值域是，

$y = -1 + \log_2 x(x$

∴其反函数是

$x_1 =$? $^{n+1}$ (? ? x_2

x_n

11.（2009陕西卷文）设曲线在点（1，1）处的切线与x轴的交点的横坐标为,则的值为

$$\frac{1}{n}$$

$$\frac{n}{n+1}$$

A. B. C. D.1

答案 B

$y = x^{n+1} (n \in N^*)$求导得$y' = ($

$k = n+1$

x

解析 对,令得在点（1，1）处的切线的斜率,在点

$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1}$

$y = 0$

x_n

y_n

（1，1）处的切线方程为,不妨设,则, 故选 B.

$$f(x)$$

12.（2009 全国卷Ⅰ文）已知函数的反函数为，则

（A）0　（B）1　　（C）2　　（D）4

答案　C

解析　由题令得，即，又，所以，故选择 C。

$$\log_{b}\left(\frac{1}{2}\right)$$

13.(2009 湖南卷理)若 a＜0，＞1，则　　　　　　　　　(　　)

A．a＞1,b＞0　　B．a＞1,b＜0　　C. 0＜a＜1, b＞0　　D. 0＜a＜1, b＜0

答案　D

解析　由得由得，所以选 D 项

$$f(x)=\begin{cases} a+\log_2 x & (当 x \geq 2 时) \\ \dfrac{x^2-4}{x-2} & (当 x<2 时) \end{cases}$$ 在点

14.（2009 四川卷理）已知函数连续，则常数 a 的值是

( )

A．2　　　B．3　　　C．4　　　D．5

【考点定位】本小题考查函数的连续性，考查分段函数，基础题。

答案　B

$$a+\log^2 2=2+2\Rightarrow$$

解析　由题得，故选择 B。

$$f(2)=a+\log_2 2,\quad \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x$$

解析 2：本题考查分段函数的连续性．由，，由函数的连续性在一点处的连续性的定义知

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$$

$$a=3$$

，可得．故选 B．

$$g\left(x\right)=4^{x}+2x$$

$$f\left(x\right)$$

15.（2009 福建卷文）若函数的零点与的零点之差的绝对值不超过 0.25， 则可以是

$$f\left(x\right)=4x$$

A. B.

$$f(x)=\ln e^{x}-$$

C.　　　　D.

答案　A

解析 的零点为x=,的零点为x=1, 的零点为 x=0, 的零点为x=.现在我们来估算的零点，因为 g(0)=-1,g()=1,所以g(x)的零点x(0,),又函数的零点与的零点之差的绝对值不超过

0.25，只有的零点适合，故选 A。

二、填空题

$A=\{x|\log_2 x \le 2\}, B=$

16.（2009 江 苏

卷）已知集合，若则实数的取值范围是，其中=_____.

解析　　考查集合的子集的概念及利用对数的性质解不等式。

由得，；由知，

所以 4。

17.(2009 山 东

卷理）若函数 f(x)=a-x-a(a>0 且 a1)有两个零点，则实数 a 的取值范围是________.

$$\{a \mid a >$$

答案

[illegible]

解析　　设函数且和函数，则函数 f(x)=a-x-a(a>0 且 a1)有两个零点，就是函数且与函数有两个交点，由图象可知当时两函数只有一个交点，不符合，当时，因为函数的图象过点(0,1)，而直线所过的点一定在点(0,1)的上方，所以一定有两个交点.所以实数 a 的取值范围是

【命题立意】:本题考查了指数函数的图象与直线的位置关系，隐含着对指数函数的性质的考

查,根据其底数的不同取值范围而分别画出函数的图象进行解答.

18.（2009 重庆卷文）记的反函数为，则方程的解____________.

答案　2

解法 1　由，得，即，于是由，解得

$x = f(8) = \log_2(8 +$

$f^{-1}(x) =$

解法2因为，所以

2005—2008年高考题

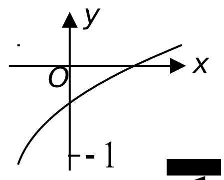
一、选择题

$f(x) = \log_a(2^x + b - 1)(a > 0$

$a, \quad b$

1.（2008年山东文科卷）已知函数的图象如图所示，则满足的关系是

（　　）



A. $0<a^{-1}<b<1$　　B. $0<b<a^{-1}<1$

C. $0<b^{-1}<a<1$　　D. $0<a^{-1}<b^{-1}<1$

答案　A

解析　本小题主要考查正确利用对数函数的图象来比较大小。

$x=0$? $-1<y=\log_a b<0$ \ $0<a^{-1}<b<1$

由图易得取特殊点

$$\log_a \frac{1}{a} < \log_a b < \log$$

$$\alpha \in \{-1, 1, 1, \quad y = x^{\alpha}$$

2. (07山东)设，则使函数的定义域为R且为奇函数的所有的值为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. 1, 3　　　　　B. −1, 1　　　　　C. −1, 3　　　　　D. −1, 1, 3

答案　**A**

$$y = e^{x+1}(x$$

3.（2006年**安徽卷**）函数的反函数是　　　　　　　　　　　　（　　）

$$y=1+\ln x(x$$

A.　　　　　　　　B.

$$y=-1+\ln x(x$$

C.　　　　　　　　D.

答案　D

$$y=-1+\ln x(x$$

$$y=e^{x}$$

解析　由得：x+1=lny，即 x=-1+lny,所以为所求，故选 D。

$$f(x)=\lg\frac{2+x}{2-x}$$

4.（**2006年湖北卷**）设，则的定义域为　　（　　）

A. $(-4,0)\cup(0,4)$　　B. $(-4,-1)\cup(1,4)$

C. $(-2,-1)\cup(1,2)$　　D. $(-4,-2)\cup(2,4)$

答案　B

解析f（x）的定义域是（－2，2），故应有－2□□2且－2□□2解得－4□x□－1或1□x□4故选B。

5.(07天津)设均为正数，且，，.则（ ）

$b < a < b <$

A. B. C. D.

答案　A

二、填空题

$f(2)+f(4)+f(8)+\cdots$　$f(3^x)=4x\log_2 3+\cdots$

6.（2008年山东文科卷）已知，则

的值等于__________.

答案　2008

解析　本小题主要考查对数函数问题。

$\because f(3^x)=4x\log_2 3+233=4\log_2\cdots$

$\therefore f(x)=4\log_2 x+\cdots$，$f(2)+f(4)+f(8)+\cdots$

$8\times 233+4(\log_2 2+2\log_2 2+3\log_2 2+\cdots+8\log_2 2)=186\cdots$

$y=\log_a(x+3)-1(a$

$mx+ny+1$

$mn>$

1

$\frac{}{m}+$

7.(07山东)函数的图象恒过定点A,若点A在直线上，其中，则的最小值为________.

答案　8

$$g(x)=\begin{cases} e^{x}, & x \\ \ln x, & x \end{cases}$$

$$g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

8.（**2006年辽宁卷**）设则__________

$$g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)=g\left(\ln\frac{1}{2}\right)=e^{\ln}$$

答案 .

解析　本题考察了分段函数的表达式、指对数的运算.

9.(**2006年重庆卷**)设，函数有最大值，则不等式的解集为________.

解析　　设，函数有最大值，∵有最小值，∴ $0<a<1$， 则不等式的解为，解得 $2<x<3$，所以不等式的解集为.

$$4^{x}+2^{x}-2$$

10.（2005年上海2）方程的解是__________.

$$4^{x}+2^{x}-2=0\Rightarrow (2^{x}-1)(2^{x}+2)=0\Rightarrow 2^{x}$$

解析

三、解答题

$$f(x)=x^{2}+\frac{a}{x}(x\neq 0,a$$

11.(07上海)已知函数

$$f(x)$$

（1）判断函数的奇偶性；

$$|f2(a+x)\partial$$

（2）若在区间是增函数，求实数的取值范围。

解析　（1）当时，为偶函数；当时，既不是奇函数也不是偶函数.

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{a}{x_1}$ … $x_2>x_1\geq$ …

（2）设，，

$x_2 > x_1 \geq$

由得，

$f(x_1) - f(x_2)$

要使在区间是增函数只需，

$$x_1x_2(x_1+x_2)-a$$

$$a \le 1$$

即恒成立，则。

另解（导数法）：，要使在区间是增函数，只需当时，恒成立，即，则恒成立，

故当时，在区间是增函数。