等差等比数列

知识讲解

一、 等差数列

1. 等差数列的概念：

如果一个数列从第二项起，每一项 d 与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列．这个常数叫 做等差数列的公差，常用字母表示．

$a_n=a_1+(n-1)d$ 等差数列的通项公式为：.

x,A,y $A=\frac{x+y}{2}$ 2. 等差中项：如果三个数组成等差数列，那么叫做和的等差中项，即.

3. 等差数列的性质

$a_m=a_n+(m-n)d,\ d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$ （1）

（2）在等差数列中，若，a_p $2p=m+n$ $a_m+a_n=a_p+a_q$

则，若，则；

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_{n-r}+a_{r+1}$ （3）

$\{pa_n+qb_n\}$ $\{a_n\},\{b_n\}$ d_1,d_2 （4）若均为等差数列，且公差分别为，则数列也为等差数列，且公差分别为.

$a_n,\ a_{n+m},\ a_{n+2m}$ md （5）在等差数列中，等距离取出若干项也构成一个等差数列，即，．．．．．，为等差数列，公差为.

4. 判断一个数列为等差数列的方法

（1）定义法：（常数）为等 $a_{n+1}-a_n=d\ (n\in N_+)$ $\{a_n\}$ 差数列.

（2）等差中项法：为 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\ (n\in N_+)$ $\{a_n\}$ 等差数列.

（3）通项法：为的一次函数 a_n $(n\in N_+)$ $\{a_n\}$ 为等差数列.

（4）前项和法：为等差数 $S_n=An^2+Bn\ (A\neq 0)$ $\{a_n\}$ 列.

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ n 5. 等差数列的前项和公式：.

【例1】 已知等差数列，等比数列 $3,\ a+2,\ b+5$ $1,\ a,\ b$ 列，则该等差数列的公差为（ ）

A．或　B．或　C．-3 3 D．

【例2】 等差数列□中，□，$a_1+a_4+a_7=15$，$\{a_n\}$，$a_2a_4a_6=45$
求数列的通项公式.

【例3】 若□为等 $a^0+a^1+a^2+\cdots+a^9$
差 数 列
的连续三项，则□的值为（ ）
A．1023　　B．1025　　C．1062　　D．2047

【例4】 等差数列□中，已知公 $a_1+a_3+\cdots+a_{99}=60$ $d=\frac{1}{2}$ $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=$
差□，且□，则□_____
A．170　　B．150　　C．145　　D．120

【例5】 设等差数列□的前□项和为□，$a_2+a_4=6$ $\{a_n\}$ S_5
□，则□等于（ ）
A．10　B．12　C．15　D．30

【例6】 已知等差数列□的前□项和为 $\frac{S_3}{3}-\frac{S_2}{2}=1$ $\{a_n\}$ S_n
□，且满足□，则数列□的公
差是（ ）
A．□　B．□　C．□　D．$\frac{1}{2}$ 1 2 3

【例7】 设数列□的前□项和□，则□的值 $S_n=n^2$ $\{a_n\}$ a_8 为（ ）
A．15　B．16　C．49　D．64

【例8】 设等差数列□的前□项和为□，$a_1=-11$ $a_4+a_6=-6$ $\{a_n\}$ S_n
若□，□，则当□取最小值时，□等于（ ）
A．□　B．□　6 9　C．□　D．□

【例9】 等差数列□的前□项和为□，若□，$a_8<0$ $\{a_n\}$ S_n □，则下列结论正确的是（ ）
A．□　B．□　C．□　D．□　$S_{15}<0$ S_{16}

【例10】等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=25$，$S_9=S_{17}$，问数列的多少项之和最大，并求此最大值.

【例11】设等差数列的前n项的和为S_n，且$S_{12}=84$，$S_{20}=460$，求S_{28}.

知识讲解

二、 等比数列

1. 等比数列的概念

如果一个数列从第二项起，每一 $q(q\neq0)$ 项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列．这个常数叫做等比数列的公比，常用字母表示．

【注意】（1）由于等比数列每一项都可 q 能作为分母，故每一项均不为 0，因此也不为 0；

（2）从第二项开始，因此首项没有前一项；

（3）均为同一个常数，即比值相 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 等；

（4）常数列都是等差数列，但不一定是等比数列．若常数列各项都为 0 的数列，它就不是等比数列，当常数列各项不为 0 时，是等比数列．

2. 等比数列的通项公式为：．$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$ $q=\sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$ 通项公式的运用：$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{a_2+a_4+\cdots+a_n}{a_1+a_3+\cdots+a_{n-1}}$

3. 等比中项：如果三个数组成等比数列，那么叫做和的等比中项，即．$G^2=xy$

两个正数（或两个负数）的等比中项有两个，它们互为相反数；一个正数与一个负数没有等比中项．

（1）等比数列通项公式的推导：

由等比数列的定义知：

$$\frac{a_2}{a_1}=q,\ \frac{a_3}{a_2}=q,\ \frac{a_4}{a_3}=q,\ \cdots\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=q,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=q,$$

将这个式子的等号两边分别相乘得：，即．$\frac{a_n}{a_1}=q^{n-1}$ $a_n=a_1q^{n-1}$

由等比数列的通项公式易知：．$\frac{a_n}{a_m}=q^{n-m}$

4. 等比数列的性质（其中公比为）：$\{a_n\}$ q

（1）公比为的等比数列的各项同乘以一个不为零的数，所得数列仍为等比数列，公比仍为．

（2）若，则有；若，则有．$m+n=p+q$ $a_ma_n=a_pa_q$

（3）等距离取出若干项也构成一个等比数列，即，，，为等比数列，公比为．（也就是说：下标成等差数列的项构成等比数列．）

（4）若等比数列的公比为，则是以为公比的等比数列．

5. 判断等比数列的方法

（1）定义法：即验证（常数）是 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 否成立，但注意必须从第二项开始所有的项都满足此条件．

（2）等比中项：$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$

（3）通项法：（可以看做是 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{q}q^{n-2}$ 类指数函数）

（4）前n项和法：$S_n = Aq^n - A\ (A \neq 0) \Leftrightarrow \{a_n\}$为等比数列

6. 等比数列前n项和公式：

$$S_n = \begin{cases} na_1 & (q = 1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases}$$

【例12】设$\{a_n\}$为公比$q>1$的等比数列，若a_{2008}和a_{2009}是方程$4x^2-8x+3=0$的两根，则$a_{2010}+a_{2011}=$__________.

【例13】已知$\{a_n\}$是等比数列，$a_2=2$，$a_5=\frac{1}{4}$，则$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=$（　）

A．$16(1-4^{-n})$　　B．$16(1-2^{-n})$　　C．$\frac{32}{3}(1-4^{-n})$　　D．$\frac{32}{3}(1-2^{-n})$

【例14】等比数列$\{a_n\}$中，已知对任意自然数n，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2^n-1$，则$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=$（　）

A．$(2^n-1)^2$　　B．$\frac{1}{3}(2^n-1)$　　C．$\frac{1}{3}(4^n-1)$　　D．4^n-1

【例15】________. $2^{-1}+2^{2}+2^{5}+\cdots+2^{3n+2}=$

【例16】设为等比数列的前项和，，$8a_2 + a_5 = 0$ 则（ ）$\frac{S_5}{S_2}=$

A．11　　B．5　　-8　　C．　　D．

【例17】设等比数列的前项和为，若，$\frac{S_6}{S_3}=3$ 则（ ）

A．　　B．　$\frac{8}{3}$　　C．

D．

【例18】已知是首项1的等比数列，是的前项和，且，则数列的前5项和为（ ）

A．或5　B．或5　C．　D．

【例19】设等比数列的各项均为正数，公比为，前项和为．若对，有，则的取值范围是（ ）			
$(0,1]$ A．	$(0,2)$ B．	$[1,2)$ C．	$(0,\sqrt{2})$ D．

【例20】已知数列的前项和为，．$S_n=\frac{1}{3}(a_n-1)(n\in \mathbf{N}^*)$

（1）求，，的值；

（2）求的通项公式及．

【例21】已知是公比为的等比数列，$a_1+2a_2=3a_3$ 且．

（1）求的值；q

（2）设是首项为，公差为的等差数列，其前项和为．当时，试比较与的大小．

课后作业

1.已知是等差数列，，，则 a_1 $+a_{10}$ $=4$ 28
该数列前项和等于（　）

A．　　B．　　100 140 C．　　D．

2.已知为等差数列，，，则 a_3 a_5 $=7$ 22
______________.

3.设等差数列的前项为，且．$\frac{S_3}{a_4}$ 若，则______________.

4.数列对任意满足，且，a_{n+1} a_3 $=6$ $+a_2$
则等于（　）

A．24　　B．27　　C．30　　D．32

5.设公差不为零的等差数列的前 a $(n\in N^*)$ $=0$
项和是，且，则（　）

A．　　B．　　C．　$S_4 < S_8$ D．

6.设是由正数组成的等比数列，　a S $=1$ 为其前项和．已知，，则　（
）

A．　　B．　　$\frac{15}{2}$ $\frac{33}{4}$ C．　　D．

7.已知是公差不为零的等差数列，，$a_1=1$ 且，，成等比数列．

（1）求数列的通项；$\{a_n\}$

（2）求数列的前项和．$\{2^{a_n}\}$ S_n