直线与圆锥曲线的位置关系

一、知识整理：

1.考点分析：此部分的解答题以直线与圆锥曲线相交占多数，并以椭圆、抛物线为载体较多。多数涉及求圆锥曲线的方程、求参数的取值范围等等。

2．解答直线与圆锥曲线相交问题的一般步骤：

设线、设点， 联立、消元， 韦达、代入、化简。

第一步：讨论直线斜率的存在性，斜率存在时设直线的方程为 y=kx+b（或斜率不为零时，设 x=my+a）；

第二步：设直线与圆锥曲线的两个交点为 $A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)$;

第三步：联立方程组 $\begin{cases} y=kx+b \\ f(x,y)=0 \end{cases}$，消去 y 得关于 x 的一元二次方程；

第四步：由判别式和韦达定理列出直线与曲线相交满足的条件 $\begin{cases} \text{二次系数不为零} \\ \Delta>0 \end{cases}$， $\begin{cases} x_1+x_2= \\ x_1\cdot x_2= \end{cases}$

第五步：把所要解决的问题转化为 x_1+x_2、x_1x_2，然后代入、化简。

3．弦中点问题的特殊解法-----点差法：即若已知弦 AB 的中点为 $M(x_o,y_o)$，先设两个交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$;分别代入圆锥曲线的方程，得 $f(x_1,y_1)=0, f(x_2,y_2)=0$，两式相减、分解因式，再将 $x_1+x_2=2x_o, y_1+y_2=2y_o$ 代入其中，即可求出直线的斜率。

4. 弦长公式：$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$（k 为弦 AB 所在直线的斜率）

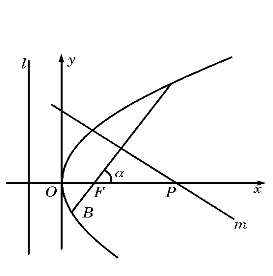
二、例题分析：

例 1． 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1(a>0,b>0)$ 的两个焦点为 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$，点 $P(3,\sqrt{7})$ 在曲线 C 上. (Ⅰ)求双曲线 C 的方程； (Ⅱ)记 O 为坐标原点，过点 $Q(0,2)$的

直线 l 与双曲线 C 相交于不同的两点 E、F，若△OEF 的面积为 $2\sqrt{2}$, 求直线 l 的方程

例 2． 设A、B是椭圆$3x^2+y^2=\lambda$上的两点，点N（1,3）是线段AB的中点,线段AB的垂直平分线与椭圆相交于C、D两点.（Ⅰ）确定λ的取值范围，并求直线AB的方程；
(Ⅱ)试判断是否存在这样的λ，使得A、B、C、D四点在同一个圆上？并说明理由.（只做第一问）

例 3. 如图,倾斜角为α的直线经过抛物线$y^2=8x$的焦点F，且与抛物线交于A、B两点.（Ⅰ）求抛物线的焦点F的坐标及准线l的方程；
(Ⅱ)若α为锐角,作线段AB的垂直平分线m交x轴于点P,
证明|FP|-|FP|cos2α为定值,并求此定值.



例 4、在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2$ 上异于坐标原点 O 的两不同动点 A、B 满足 $AO\perp BO$（如图 4 所示）.△AOB 的面积是否存在最小值？若存在，请求出最小值；若不存在，请说明理由.

例 5. 设 b>0，椭圆方程为 $\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$，如图 4 所示，过点 $F(0,b+2)$ 作 x 轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为 G. 已知抛物线在点 G 的切线经过椭圆的右焦点 F_1.

(1) 求满足条件的椭圆方程和抛物线方程;

(2) 设 A, B 分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点 P，使得△ABP 为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）.

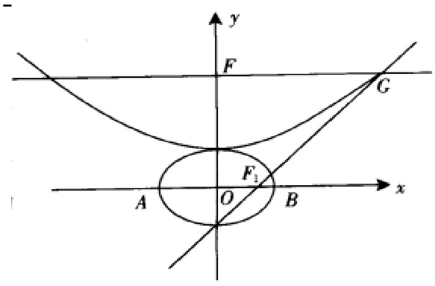


图 4

巩固练习：

1. 在平面直角坐标系xOy巾，已知圆心在第二象限、半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆C与直线 $y=x$ 相切于坐标原点O. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1$ 与圆c的一个交点到椭圆两焦点的距离之和为10.

(1) 求圆C的方程；　(2) 试探究圆C上是否存在异于原点的点Q，使Q到椭圆右焦点F的距离等于线段OF的长．若存在，请求出点Q的坐标；若不存在，请说明理由.

2. 设F_1、F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左、右焦点.

（Ⅰ）若P是该椭圆上的一个动点，求$\overrightarrow{\mathrm{PF}_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的最大值和最小值;

（Ⅱ）设过定点$M(0,2)$的直线l与椭圆交于不同的两点A、B，且$\angle AOB$为锐角（其中O为坐标原点），求直线l的斜率k的取值范围.

直线与圆锥曲线的位置关系（参考答案）

二、例题分析：

例 1. (I)解法 1：依题意，由 $a^2+b^2=4$，得双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4-a^2}=1$（$0<a^2<4$），

将点（3，$\sqrt{7}$）代入上式，得 $\frac{9}{a^2}-\frac{7}{4-a^2}=1$.解得 $a^2=18$（舍去）或 $a^2=2$，

故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

解法 2：依题意得，双曲线的半焦距 $c=2$.

$2a=|PF_1|-|PF_2|=\sqrt{(3+2)^2+(\sqrt{7})^2}-\sqrt{(3-2)^2+(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2}$,

$\therefore a^2=2$，$b^2=c^2-a^2=2$.

$\therefore$双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

(II)解：依题意，可设直线 l 的方程为 $y=kx+2$，代入双曲线 C 的方程并整理，

得$(1-k^2)x^2-4kx-6=0$.

$\because$直线 l 与双曲线 C 相交于不同的两点 E、F,

$$\therefore\begin{cases}1-k^2\neq 0,\\ \Delta=(-4k)^2+4\times 6(1-k)^2>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\neq\pm 1,\\ -\sqrt{3}<k<\sqrt{3},\end{cases}$$

$\therefore k\in(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})$.

设 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$，则由①式得 $x_1+x_2=\frac{4k}{1-k^2},x_1x_2=\frac{6}{1-k^2}$，于是

$|EF|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}$

而原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S_{\Delta OEF}=\frac{1}{2}d\cdot|EF|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}$.

若 $S_{\Delta OEF}=2\sqrt{2}$，即 $\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3-k^2}}{|1-k^2|}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow k^4-k^2-2=0$, 解得 $k=\pm\sqrt{2}$，

满足②.故满足条件的直线 l 有两条，其方程分别为 $y=\sqrt{2}x+2$ 和 $y=-\sqrt{2}x+2$.

例 2. (Ⅰ) 解法 1：依题意，可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)+3$,代入$3x^2+y^2=\lambda$，整理得

$(k^2+3)x^2-2k(k-3)x+(k-3)^2-\lambda=0$. ①

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则x_1,x_2 是方程①的两个不同的根，

$\therefore \Delta = 4[\lambda(k^2+3) - 3(k-3)^2] > 0,$ ②

且 $x_1 + x_2 = \dfrac{2k(k-3)}{k^2+3}$, 由 N（1，3）是线段 AB 的中点，得

$\dfrac{x_1+x_2}{2} = 1, \qquad \therefore k(k-3) = k^2+3.$

解得 k=－1，代入②得，$\lambda > 12$, 即λ 的取值范围是（12，+∞）.

于是，直线 AB 的方程为 $y - 3 = -(x-1)$, 即$x + y - 4 = 0.$

解法 2：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则有

$$\begin{cases} 3x_1^2 + y_1^2 = \lambda \\ 3x_2^2 + y_2^2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0.$$

依题意，$x_1 \neq x_2, \therefore k_{AB} = -\dfrac{3(x_1+x_2)}{y_1+y_2}.$

∵N（1，3）是 AB 的中点， ∴ $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 6$, 从而$k_{AB} = -1.$

又由 N（1，3）在椭圆内，∴ $\lambda > 3 \times 1^2 + 3^2 = 12,$

∴λ 的取值范围是（12，+∞）.

直线 AB 的方程为 y－3=－（x－1），即 x+y－4=0.

（II）解：∵CD 垂直平分 AB，∴直线 CD 的方程为 y－3=x－1，即 x－y+2=0，

代入椭圆方程，整理得 $4x^2 + 4x + 4 - \lambda = 0.$

又设 $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$, CD 的中点为 $C(x_0, y_0)$, 则x_3, x_4 是方程③的两根，

$\therefore x_3 + x_4 = -1$, 且$x_0 = \dfrac{1}{2}(x_3+x_4) = -\dfrac{1}{2}, y_0 = x_0 + 2 = \dfrac{3}{2}$, 即$M(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}).$

于是由弦长公式可得 $|CD| = \sqrt{1 + (-\dfrac{1}{k})^2} \cdot |x_3 - x_4| = \sqrt{2(\lambda - 3)}.$ ④

将直线 AB 的方程 x+y－4=0，代入椭圆方程得 $4x^2 - 8x + 16 - \lambda = 0$ ⑤

同理可得 $|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{2(\lambda - 12)}.$ ⑥

∵当 $\lambda > 12$ 时，$\sqrt{2(\lambda-3)} > \sqrt{2(\lambda-12)}, \therefore |AB| < |CD|$

假设存在 λ>12，使得 A、B、C、D 四点共圆，则 CD 必为圆的直径，点 M 为圆心.

点 M 到直线 AB 的距离为 $d = \dfrac{|x_0 + y_0 - 4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$ ⑦

于是，由④、⑥、⑦式和勾股定理可得

$$|MA|^2=|MB|^2=d^2+|\frac{AB}{2}|^2=\frac{9}{2}+\frac{\lambda-12}{2}=\frac{\lambda-3}{2}=|\frac{CD}{2}|^2.$$

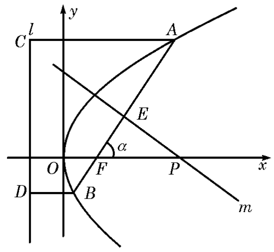
故当$\lambda>12$时，A、B、C、D四点匀在以M为圆心，$\frac{|CD|}{2}$为半径的圆上.

例3. （Ⅰ）解：设抛物线的标准方程为$y^2=2px$，则$2p=8$，从而$p=4$.

因此焦点$F(\frac{p}{2},0)$的坐标为（2，0），准线l的方程为$x=-2$。

（Ⅱ）解法一：如图,作$AC\perp l$，$BD\perp l$，垂足为C、D，则由抛物线的定义知$|FA|=|FC|$,$|FB|=|BD|$.

记A、B的横坐标分别为$x_x x_z$，则



$|FA|=|AC|=x_x+\frac{p}{2}=|FA|\cos a+\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=|FA|\cos a+4$

解得$|FA|=\frac{4}{1-\cos a}$，

类似地有$|FB|=4-|FB|\cos a$，解得$|FB|=\frac{4}{1+\cos a}$。

记直线m与AB的交点为E，则

$$|FE|=|FA|-|AE|=|FA|-\frac{|FA|+|FB|}{2}=\frac{1}{2}(|FA|-|FB|)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{1-\cos a}-\frac{4}{1+\cos a}\right)=\frac{4\cos a}{\sin^2 a}$$

所以$|FP|=\frac{|FE|}{\cos a}=\frac{4}{\sin^2 a}$。

故$|FP|-|FP|\cos 2a=\frac{4}{\sin^2 a}(1-\cos 2a)=\frac{4\times 2\sin^2 a}{\sin^2 a}=8$。

解法二：设$A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，直线AB的斜率为$k=\tan a$，则直线方程为$y=k(x-2)$。

将此式代入$y^2=8x$,得$k^2x^2=4(k^2+2)x+4k^2=0$，故$x_A+x_B=\frac{k(k^2+2)}{k^2}$。

记直线m与AB的交点为$E(x_E,y_E)$，则$x_E=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$，$y_E=k(x_E-2)=\frac{4}{k}$，

故直线m的方程为$y-\frac{4}{k}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{2k^2+4}{k^2}\right)$.

令y=0,得P的横坐标$x_P-\frac{2k^2+4}{k^2}+4$故 $|FP|=x_P-2=\frac{4(k^2+1)}{k^2}=\frac{4}{\sin^2 a}$。

从而$|FP|-|FP|\cos 2a=\frac{4}{\sin^2 a}(1-\cos 2a)=\frac{4\times 2\sin^2 a}{\sin^2 a}=8$为定值。

三、基础训练：

1.解：∵直线AB的斜率显然存在，

∴设直线AB的方程为$y=kx+b$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，依题意得

由$\begin{cases} y=kx+b \\ y=x^2 \end{cases}$,消去$y$,得 $x^2-kx-b=0$，①

∴$x_1+x_2=k$，② $x_1x_2=-b$ ③

∵ $OA\perp OB$，∴ $x_1x_2+y_1y_2=0$，即 $x_1x_2+x_1^2x_2^2=0$，④

由③④得，$-b+b^2=0$，∴ $b=1$或$b=0$(舍去)

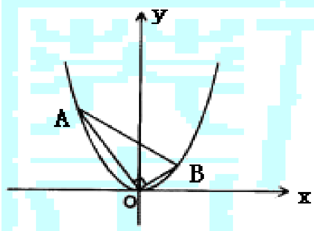


图4

∴设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$

由弦长公式得$|AB|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

把②⑤代入上式，得 $|AB|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+4}$，

设点 O 到直线 AB 的距离为 d，则 $d=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，

∴ $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\dfrac{\sqrt{k^2+4}}{2}$，

∴ 当 $k=0$，$S_{\Delta AOB}$ 有最小值，

∴ ΔAOB 的面积存在最小值，最小值是1 .

2. 解：(1)解方程组$\begin{cases}y=b+2\\x^2=8(y-b),(x>0)\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=4\\y=b+2\end{cases}$，所以点 G 的坐标为 G(4, b+2)，

由 $x^2=8(y-b)$，得 $y=\dfrac{1}{8}x^2+b$，求导数得 $y'=\dfrac{1}{4}x$，

于是，抛物线 $y=\dfrac{1}{8}x^2+b$ 在点 G 的切线 *l* 的斜率为 $k=y'|_{x=4}=\dfrac{1}{4}\times4=1$，

又椭圆 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中 $c^2=2b^2-b^2=b^2$，即 c=b，所以椭圆的右焦点为 F_1（b, 0）

由切线 *l* 过点 F_1，可知 $k_{GF_1}=\dfrac{b+2-0}{4-b}=1$，解得 b=1.

所以满足条件的椭圆方程和抛物线方程分别为 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 和 $x^2=8(y-1)$

(2) 在抛物线上存在点 P，使得△ABP 为直角三角形。且这样的点有 4 个。

证明：分别过点 A、B 做 y 轴的平行线，交抛物线于 M，N 点，则∠MAB=90°，∠NBA=90°，

显然 M，N 在抛物线上，且使得△ABM，△ABN 为直角三角形。

若以$\angle APB$ 为直角，设 P 点坐标为$(x,\dfrac{1}{8}x^2+1)$，A、B 两点的坐标分别为$(-\sqrt{2},0)$ 和$(\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2-2+(\dfrac{1}{8}x^2+1)^2=\dfrac{1}{64}x^4+\dfrac{5}{4}x^2-1=0$。

关于 x^2 的二次方程有一大于零的解，∴ x 有两解，即以$\angle APB$ 为直角的 $Rt\Delta ABP$ 有两个，

综上所述，满足条件的点共有 4 个。

四．巩固练习：

1. 【解析】(1) 设圆的方程为 $(x-s)+(y-t)^2=8$，依题意 $s^2+t^2=8$，$\dfrac{|s-t|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，$s<0,t>0$

解得 $s=-2,t=2$，故所求圆的方程为 $(x+2)+(y-2)^2=8$

(注:此问若结合图形加以分析会大大降低运算量!)

(2) 由椭圆的第一定义可得 $2a=10 \Rightarrow a=5$，故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，焦点 $F(4,0)$

设 $Q(x_0,y_0)$，依题意 $(x_0-4)^2+{y_0}^2=16$，$(x_0+2)^2+(y_0-2)^2=8$

解得 $x_0=\dfrac{4}{5},y_0=\dfrac{12}{5}$ 或 $x_0=0,y_0=0$（舍去）

存在 $Q(\dfrac{4}{5},\dfrac{12}{5})$ 使得该点到右焦点F的距离等于 $|OF|$ 的长。

2. 解：（Ⅰ）解法一：易知 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$ 所以 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right),F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，设 $P(x,y)$，

则 $PF_1 \cdot PF_2=\left(-\sqrt{3}-x,-y\right),\left(\sqrt{3}-x,-y\right)=x^2+y^2-3=x^2+1-\dfrac{x^2}{4}-3=\dfrac{1}{4}\left(3x^2-8\right)$

因为 $x\in\left[-2,2\right]$，故当 $x=0$，即点 P 为椭圆短轴端点时，$PF_1\cdot PF_2$ 有最小值 -2

当 $x=\pm 2$，即点 P 为椭圆长轴端点时，$PF_1\cdot PF_2$ 有最大值 1

（Ⅱ）显然直线 $x=0$ 不满足题设条件，可设直线 $l:y=kx+2,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=kx+2 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，消去 y，整理得：$\left(k^2+\dfrac{1}{4}\right)x^2+4kx+3=0$

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{4k}{k^2+\dfrac{1}{4}},x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{k^2+\dfrac{1}{4}}$

由 $\Delta=\left(4k\right)^2-4\left(k^2+\dfrac{1}{4}\right)\times 3=4k^2-3>0$ 得：$k<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $k>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ①

又 $0^0<\angle A0B<90^0 \Rightarrow \cos\angle A0B>0 \Rightarrow OA\cdot OB>0$

$\therefore OA\cdot OB=x_1x_2+y_1y_2>0$

又 $y_1y_2=\left(kx_1+2\right)\left(kx_2+2\right)=k^2x_1x_2+2k\left(x_1+x_2\right)+4=\dfrac{3k^2}{k^2+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{-8k^2}{k^2+\dfrac{1}{4}}+4=\dfrac{-k^2+1}{k^2+\dfrac{1}{4}}$

$\because \frac{3}{k^2+\frac{1}{4}}+\frac{-k^2+1}{k^2+\frac{1}{4}}>0$，即 $k^2<4$ ， $\therefore -2<k<2$ ②

故由①、②得 $-2<k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}<k<2$。