含参不等式恒成立问题中，求参数取值范围一般方法

恒成立问题是数学中常见问题，也是历年高考的一个热点。大多是在不等式中，已知一个变量的取值范围，求另一个变量的取值范围的形式出现。下面介绍几种常用的处理方法。

1、 分离参数

如果能通过恒等变形分离出参数，即：若 $a \geq f(x)$ 恒成立，只须求出 $f(x)_{\max}$，则 $a \geq f(x)_{\max}$；若 $a \leq f(x)$ 恒成立，只须求出 $f(x)_{\min}$，则 $a \leq f(x)_{\min}$，转化为函数求最值。

已知函数 $f(x)=e^x-ax$，$a\in \mathbf{R}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $x\in[0,+\infty)$ 时，都有 $f(x)\geqslant 0$ 成立，求实数 a 的取值范围.

解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=e^x-a$. ……………………………2 分

（1）当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 成立，$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,+\infty)$； ……3 分

（2）当 $a>0$ 时，

令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$，则 $f(x)$ 的单调增区间是 $(\ln a,+\infty)$. …………4 分

令 $f'(x)<0$，得 $x<\ln a$，则 $f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty,\ln a)$. …………5 分

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,+\infty)$；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty,\ln a)$，$f(x)$ 的单调增区间是 $(\ln a,+\infty)$. ………………………6 分

（Ⅱ）当 $x=0$ 时，$f(x)=1\geqslant 0$ 成立，$a\in \mathbf{R}$. ………………………………7 分

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-ax\geqslant 0$ 成立，

即 $x\in(0,+\infty)$ 时，$a\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 成立.

设 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$， ………………………………………………………9 分

所以 $g'(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$. ………………………………10 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数； …………11 分

$x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上为增函数. …………12 分

则 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值，$g(1)=\mathrm{e}$. 则 $a\leqslant \mathrm{e}$.

综上所述，$x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 成立的 a 的范围是 $(-\infty,\mathrm{e}]$

二．转化为函数求最值

如果通过恒等变形不能直接解出参数，则可将两变量分别置于不等式的两边，即：若 $f(a)\geq g(x)$ 恒成立，只须求出 $g(x)_{\max}$，则 $f(a)\geq g(x)_{\max}$，然后解不等式求出参数 a 的取值范围；若 $f(a)\leq g(x)$ 恒成立，只须求出 $g(x)_{\min}$，则 $f(a)\leq g(x)_{\min}$，然后解不等式求出参数 a 的取值范围，问题还是转化为函数求最值。

已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x\ (a,b\in\mathbf{R})$，在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+2=0$.

⑴ 求函数 $f(x)$ 的解析式；

⑵ 若对于区间 $[-2,2]$ 上任意两个自变量的值 x_1,x_2，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant c$，求实数 c 的最小值；

【解析】 ∵ $f'(x)=3ax^2+2bx-3$．

$\begin{cases} f(1)=-2, \\ f'(1)=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a+b-3=-2, \\ 3a+2b-3=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=0. \end{cases}$

∴ $f(x)=x^3-3x$．

令 $f'(x)=3x^2-3=0$，即 $3x^2-3=0$，解得 $x=\pm1$．

x	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-2	↗	[illegible]	↘	[illegible]	↗	0

∵ $f(-1)=2$，$f(1)=-2$，

∴ 当 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)_{\max}=2$，$f(x)_{\min}=-2$．

则对于区间 $[-2,2]$ 上任意两个自变量的值 x_1,x_2，都有

$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x)_{\max}-f(x)_{\min}|=4$，所以 $c\geqslant 4$．

所以 c 的最小值为 4．

三．数形结合

数形结合法是先将不等式两端的式子分别看作两个函数，且正确作出两个函数的图象，

然后通过观察两图象（特别是交点时）的位置关系，列出关于参数的不等式。

设 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a+1)x^2+3ax+1$.

⑴ 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,4)$ 内单调递减，求 a 的取值范围；

⑵ 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值是 1，求 a 的值，并说明在区间 $(1,4)$ 内函数 $f(x)$ 的单调性.

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(2a+1)x+2\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的切线互相平行，求 a 的值；（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅲ) 设 $g(x)=x^2-2x$，若对任意 $x_1\in(0,2]$，均存在 $x_2\in(0,2]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求

a 的取值范围.

解： $f'(x)=ax-(2a+1)+\frac{2}{x}\ (x>0)$. ………………2 分

（Ⅰ）$f'(1)=f'(3)$，解得 $a=\frac{2}{3}$. ………3 分

（Ⅱ）$f'(x)=\frac{(ax-1)(x-2)}{x}\ (x>0)$. ……5 分

① 当 $a\le 0$ 时，$x>0$，$ax-1<0$，

在区间 $(0,2)$ 上，$f'(x)>0$；在区间 $(2,+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,2)$，单调递减区间是 $(2,+\infty)$. ………6 分

② 当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{a}>2$，

在区间 $(0,2)$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；在区间 $(2,\frac{1}{a})$ 上 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,2)$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间是 $(2,\frac{1}{a})$. …………7 分

③ 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\frac{(x-2)^2}{2x}$， 故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$. ………8 分

④ 当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$0<\frac{1}{a}<2$，

在区间 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$；在区间 $(\frac{1}{a},2)$ 上 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(2,+\infty)$，单调递减区间是 $(\frac{1}{a},2)$. ………9 分

（Ⅲ）由已知，在 $(0,2]$ 上有 $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$． ………………10 分

由已知，$g(x)_{\max} = 0$，由（Ⅱ）可知，

① 当 $a \le \frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2]$ 上单调递增，

故 $f(x)_{\max} = f(2) = 2a - 2(2a+1) + 2\ln 2 = -2a - 2 + 2\ln 2$，

所以，$-2a - 2 + 2\ln 2 < 0$，解得 $a > \ln 2 - 1$，故 $\ln 2 - 1 < a \le \frac{1}{2}$． ……………11 分

② 当 $a > \frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a}]$ 上单调递增，在 $[\frac{1}{a},2]$ 上单调递减，

故 $f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a}) = -2 - \frac{1}{2a} - 2\ln a$．

由 $a > \frac{1}{2}$ 可知 $\ln a > \ln\frac{1}{2} > \ln\frac{1}{\mathrm{e}} = -1$，$2\ln a > -2$，$-2\ln a < 2$，

所以，$-2 - 2\ln a < 0$，$f(x)_{\max} < 0$， ………………13 分

综上所述，$a > \ln 2 - 1$． ………………14 分

含参数导数问题的四个基本讨论点

1. 最高次项系数含字母的讨论最高次项系数的正负或 0

已知函数 $f(x) = \frac{2ax + a^2 - 1}{x^2 + 1}$，其中 $a \in \mathbf{R}$．（Ⅰ）当 $a = 1$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在原点处的切线方程；（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间．

解：（Ⅰ）当 $a = 1$ 时，$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$，$f'(x) = -2\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$． ……2 分

由 $f'(0) = 2$，得曲线 $y = f(x)$ 在原点处的切线方程是 $2x - y = 0$． ……4 分

（Ⅱ）$f'(x) = -2\frac{(x+a)(ax-1)}{x^2+1}$． ………6 分

① 当 $a = 0$ 时，$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$．

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，在 $(-\infty,0)$ 单调递减． …7 分

当$a \neq 0$，$f'(x)=-2a\dfrac{(x+a)(x-\frac{1}{a})}{x^2+1}$．

② 当$a>0$时，令$f'(x)=0$，得$x_1=-a$，$x_2=\dfrac{1}{a}$，$f(x)$与$f'(x)$的情况如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘

3 求导后，考虑导函数为零是否有实根（或导函数的分子能否分解因式），从而引起讨论。

已知函数$f(x)=x^2-1$与函数$g(x)=a\ln x(a\neq 0)$．

⑴ 若$f(x)$，$g(x)$的图象在点$(1,0)$处有公共的切线，求实数a的值；

⑵ 设$F(x)=f(x)-2g(x)$，求函数$F(x)$的极值．

【解析】 ⑴ □□ $f(1)=0$ □ $g(1)=0$ □

□□□ $(1,0)$ □□□□□ $f(x)$ □ $g(x)$ □□□□

□□ $f(x)=x^2-1$ □ $g(x)=a\ln x$ □ $f'(x)=2x$ □ $g'(x)=\dfrac{a}{x}$ □

□□□□□ $f'(1)=g'(1)$ □□□ $2=\dfrac{a}{1}$ □□ $a=2$

⑵ □□ $F(x)=f(x)-2g(x)=x^2-1-2a\ln x$ □ $x>0)$

□□ $F'(x)=2x-\dfrac{2a}{x}=\dfrac{2(x^2-a)}{x}$

□ $a<0$ □□□□ $x>0$ □□ $x^2-a>0,$ □□ $F'(x)>0$ □ $x>0$ □□□□

□□ $F(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□ $F(x)$ □□□

□ $a>0$ □□□ $F'(x)=0$ □□□ $x_1=\sqrt{a}$ □ $x_2=-\sqrt{a}$ □□□

□□□ $x>0$ □□ $F'(x)$ □ $F(x)$ □□□□□□□□□

x	$(0,\sqrt{a})$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a},+\infty)$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	↘	□□□	↗

□□□ $x=\sqrt{a}$ □□ $F(x)$ □□□□□□□

$F(\sqrt{a})=(\sqrt{a})^2-1-2a\ln\sqrt{a}=a-1-a\ln a$ □

□□□□ $a<0$ □□□□ $F(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $a>0$ □□□□ $F(x)$ □ $x=\sqrt{a}$ □□□□□□ $a-1-a\ln a$ □

4.求导后，导函数为零有实根（或导函数的分子能分解因式），但不知导函数为零的实根

是否落在定义域内，从而引起讨论。已知函数 $f(x)=a\ln x-\dfrac{1}{x}$，$a\in \mathbf{R}$.

? 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线与直线 $x+2y=0$ 垂直，求 a 的值；

? 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

? 当 $a=1$，且 $x\geqslant 2$ 时，证明：$f(x-1)\leqslant 2x-5$.

【解析】 ? □□ $f(x)$ □□□□□ $\{x\mid x>0\}$ □ $f'(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ □

□□□ $y=f(x)$ □□ $(1,\ f(1))$ □□□□□□□ $x+2y=0$ □□□

□□ $f'(1)=a+1=2$ □□ $a=1$ □

? □□ $f'(x)=\dfrac{ax+1}{x^2}$ □

□ $a\geqslant 0$ □□□□ $x\in(0,\ +\infty)$ □□ $f'(x)>0$ □□□□□□□□□

□ $f(x)$ □ $(0,\ +\infty)$ □□□□□□

□ $a<0$ □□□ $f'(x)=0$ □□ $x=-\dfrac{1}{a}\in(0,\ +\infty)$ □

□ $x\in(0,\ -\dfrac{1}{a})$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□

□ $x\in(-\dfrac{1}{a},\ +\infty)$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□

? □ $a=1$ □□ $f(x-1)=\ln(x-1)-\dfrac{1}{x-1}$ □ $x\in[2,\ +\infty)$ □

□ $g(x)=\ln(x-1)-\dfrac{1}{x-1}-2x+5$ □

$g'(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}-2=-\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(x-1)^2}$ □

□ $x>2$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □ $(2,\ +\infty)$ □□□□□

□ $g(2)=0$ □□□ $g(x)$ □ $(2,\ +\infty)$ □□□□

□□□ $x\in[2,\ +\infty)$ □□ $g(x)\leqslant 0$ □

□ $\ln(x-1)-\dfrac{1}{x-1}-2x+5\leqslant 0$ □

□□ $a=1$ □□ $x\geqslant 2$ □□ $f(x-1)\leqslant 2x-5$ □□□

已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{2a^3}{x}+1$, 其中 $a>0$.

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $y=1$ 平行，求 a 的值；

（II）求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值.

解： $f'(x)=2x-\dfrac{2a^3}{x^2}=\dfrac{2(x^3-a^3)}{x^2}$，$x\neq 0$. ....2 分

（I）由题意可得 $f'(1)=2(1-a^3)=0$，解得 $a=1$， ....3 分

此时 $f(1)=4$，在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 $y=4$，与直线 $y=1$ 平行.

故所求 a 值为 1. ..... 4 分

（II）由 $f'(x)=0$ 可得 $x=a$，$a>0$， .... 5 分

① 当 $0<a\le 1$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(1,2]$ 上恒成立，

所以 $y=f(x)$ 在 $[1,2]$ 上递增， .... 6 分

所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值为 $f(1)=2a^3+2$. .... 7 分

② 当 $1<a<2$ 时，

x	$(1,a)$	a	$(a,2)$
$f'(x)$	－	0	＋
$f(x)$	↘	极小	↗

........10 分

由上表可得 $y=f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值为 $f(a)=3a^2+1$. .... 11 分

③ 当 $a\ge 2$ 时，$f'(x)<0$ 在 $[1,2)$ 上恒成立，

所以 $y=f(x)$ 在 $[1,2]$ 上递减. .... 12 分

所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值为 $f(2)=a^3+5$. .... 13 分

综上讨论，可知：

当 $0<a\le 1$ 时，$y=f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值为 $f(1)=2a^3+2$；

当 $1<a<2$ 时，$y=f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值为 $f(a)=3a^2+1$；

当 $a\ge 2$ 时，$y=f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值为 $f(2)=a^3+5$.

3.求导后，导函数为零有实根（或导函数的分子能分解因式），导函数为零的实根也落在定义域内，但不知这些实根的大小关系，从而引起讨论。已知函数 $f(x)=e^x(x^2+ax+1)$.

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在

点$(2,f(2))$处的切线与 x 轴平行，求 a 的值；（Ⅱ）求函数$f(x)$的极值.

解：（Ⅰ）$f'(x)=e^x(x^2+ax+1+2x+a)=e^x[x^2+(a+2)x+a+1]$.　　………3 分

因为曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线与 x 轴平行，

所以 $f'(2)=0$，即$f'(2)=e^2[4+2(a+2)+a+1]=0$　　……4 分

所以 $a=-3$.　　…5 分

（Ⅱ）$f'(x)=e^x(x+a+1)(x+1)$.

令$f'(x)=0$，则$x=-a-1$或$x=-1$.　　……6 分

① 当$a+1=1$，即$a=0$时，$f'(x)=e^x(x+1)^2\geq 0$，

函数$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为增函数，函数无极值点；　　………7 分

② 当$-(a+1)<-1$，即$a>0$时.

x	$(-\infty,-$	$-a-1$	$(-a-1,-$	-1	$(-1,+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

……9 分

所以 当$x=-a-1$时，函数有极大值是$e^{-a-1}(a+2)$，当$x=-1$时，函数有极小值是$\dfrac{2-a}{e}$；

……10 分

③ 当$-(a+1)>-1$，即$a<0$时.

x	$(-\infty,-1$	-1	$(-1,-$	$-a-1$	$(-a-$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

………12 分

所以 当$x=-1$时，函数有极大值是$\dfrac{2-a}{e}$，当$x=-a-1$时，函数有极小值是

$e^{-a-1}(a+2)$.

……13 分

综上所述，当 $a=0$ 时函数无极值；

当 $a>0$ 时，当 $x=-a-1$ 时，函数有极大值是 $e^{-a-1}(a+2)$，当 $x=-1$ 时，函数有极小值是 $\frac{2-a}{e}$；当 $a<0$ 时，当 $x=-1$ 时，函数有极大值是 $\frac{2-a}{e}$，当 $x=-a-1$ 时，函数有极小值是 $e^{-a-1}(a+2)$.

故 $f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty,-a)$，$(\frac{1}{a},+\infty)$；单调增区间是 $(-a,\frac{1}{a})$. ……10 分

③ 当 $a<0$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,x_2)$	x_2	(x_2,x_1)	x_1	$(x_1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$f(x_2)$	↘	$f(x_1)$	↗

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,\frac{1}{a})$；单调减区间是 $(-\frac{1}{a},-a)$，$(-a,+\infty)$.

……13 分

综上，$a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$，$(\frac{1}{a},+\infty)$ 单调递减；在 $(-a,\frac{1}{a})$ 单调递增.

$a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，在 $(-\infty,0)$ 单调递减；$a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{a})$，$(-a,+\infty)$ 单调递增；在 $(\frac{1}{a},-a)$ 单调递减.

以上四点即为含参数导数问题的四个基本讨论点，在求解有关含参数的导数问题时，可按上述四点的顺序对参数进行讨论。因此，对含参数的导数问题的讨论，还是有一定的规律可循的。当然，在具体解题中，可能要讨论其中的两点或三点，这时的讨论就更复杂一些了，需要灵活把握。

练习　**11.（2011 年昌平期末文 18）**已知函数 $f(x)=x^3-ax^2-x+a$，其中 a 为实数.

（1）求导数 $f'(x)$；

（2）若 $f'(-1)=0$, 求 $f(x)$ 在 $[-2,3]$ 上的最大值和最小值；

（3）若 $f(x)$ 在（$-\infty,-2]$ 和 $[3,+\infty)$ 上都是递增的，求 a 的取值范围

12．（**2011 年海淀期末文 18**）已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{2a^3}{x}+1$, 其中 $a>0$.

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $y=1$ 平行，求 a 的值；

（II）求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值.

13．（**2011 年东城区期末文 18**）已知函数 $f(x)=x^3+2x^2+x$．（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的

单调

区间与极值；（Ⅱ）若对于任意 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geq ax^2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

14．（**2011 年东城区期末理 18**）已知函数 $f(x)=x\ln x$．（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最小值；（Ⅱ）若存在 $x\in[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$（$\mathrm{e}$ 为自然对数的底数，且 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$）使不等式 $2f(x)\geq -x^2+ax-3$ 成立，求实数 a 的取值范围.

15．（**2011 年房山区期末文 19**）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2$ 在 $x=-1$ 时取得极值，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 12；函数 $g(x)=f(x)+mx$，$x\in[1,+\infty)$，函数 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)$ 的最小值为 0．（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；（Ⅱ）求实数 m 的值；(III) 求证：$g(x)\geq -7$.

17．（**2010 年海淀期中理 19**）已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-a(a+2)x}{x+1}$（$a$ □ 0）.（I）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线方程；（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最小值.

19．（**2011 年东城区示范校考试理 20**）已知函数 $f(x)=(x-1)^2-a\ln|x-1|$ **(**$a\in\mathbf{R},a\neq 0$**)**.

（1）$a=8$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $[e+1,e^2+1]$ 上的最小值.

20．（**2011 年东城区示范校考试文 18**）设函数 $f(x)=x^3-3ax+b(a\neq 0)$．（Ⅰ）若曲线

$y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处与直线 $y=8$ 相切，求 a,b 的值；（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点.

21．（**2011年西城期末理19**）已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(2a+1)x+2\ln x$ $(a\in \mathbf{R})$.（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的切线互相平行，求 a 的值；（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；(Ⅲ) 设 $g(x)=x^2-2x$，若对任意 $x_1\in(0,2]$，均存在 $x_2\in(0,2]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求 a 的取值范围.

22．（**2011年西城期末文19**）已知函数 $f(x)=ax+\ln x$ $(a\in \mathbf{R})$.（Ⅰ）若 $a=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处切线的斜率；（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；（Ⅲ）设 $g(x)=x^2-2x+2$，若对任意 $x_1\in(0,+\infty)$，均存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求 a 的取值范围.

23．（**2011年丰台区期末理19**）设函数 $f(x)=(1+x)^2-2\ln(1+x)$．（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；（II）当 0<a<2 时，求函数 $g(x)=f(x)-x^2-ax-1$ 在区间 $[0,3]$ 上的最小值.

24．（**2011年丰台区期末文19**）已知函数 $f(x)=e^x(x^2+ax+1)$．（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线与 x 轴平行，求 a 的值；（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的极值.

25．（**2011年朝阳期末理17**）已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\frac{1-a}{x}-1$ $(a\in \mathbf{R})$.（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,\ f(2))$ 处的切线方程；（Ⅱ）当 $0\leqslant a<\frac{1}{2}$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性.

26．（2011 年朝阳期末文 17）已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的图象过点 $P(0,\ 2)$，且在点 $M(-1,\ f(-1))$ 处的切线方程为 $6x-y+7=0$．（Ⅰ）求函数 $y=f(x)$ 的解析式；（Ⅱ）求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

27．（2011 年海淀期末理 18）已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-ax+\frac{1-a}{x+1}$ （$a\geq\frac{1}{2}$）.（Ⅰ）当曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $l:y=-2x+1$ 平行时，求 a 的值；（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间.

28．（2011 年石景山期末理 19）已知函数 $f(x)=\frac{a+\ln x}{x}(a\in R)$．（Ⅰ）若 $a=4$，求曲线 $f(x)$ 在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程；（Ⅱ）求 $f(x)$ 的极值；（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=1$ 的图象在区间 $(0,e^2]$ 上有公共点，求实数 a 的取值范围.

29．（2011 年昌平期末理 18）已知函数 $f(x)=ax^2+2\ln(x+1)$，其中 a 为实数.（1）若 f(x) 在 $x=1$ 处有极值，求 a 的值；（2）若 f(x) 在 $[2,3]$ 上是增函数，求 a 的取值范围。