北京与全国其他省市高考数学试卷导数试题异同浅析

黄应桥

导数是研究函数的重要工具，是高等数学的基础，因而是高考的重点考查内容之一。各套试卷都有一道解答题，我们要在高考中取得好成绩，尤其是立志报考重点大学的考生，要想成绩超人一等，应在导数的复习上多花功夫。

“他山这石，可以攻玉”，我们在复习导数时，自然想到参考利用各省市的高考试题。但是我们在利用这些宝贵的资源时，应当充分考虑北京高考特点，才能有利于我们复习备考。下面我就北京与全国其他省市高考试卷导数试题异同谈点个人看法。以供参考。

北京选理科试题，其他省市试题选用广东为例。

例题　北京理　设L为曲线C：$y=\dfrac{\ln x}{x}$在点(1，0)处的切线.

(1)求 L 的方程；

(2)证明：除切点(1，0)之外，曲线 C 在直线 L 的下方.

广东卷　设函数$f(x)=(x-1)e^x-kx^2(k\in)$.

(1)当 $k=1$ 时，求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)当$k\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$时，求函数$f(x)$在$[0,k]$上的最大值$M$.

试题解答与分析

北京理试题解答：

(1)设$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

所以 $f'(1)=1$.　所以 L 的方程为 $y=x-1$.

(2)令 $g(x)=x-1-f(x)$，则除切点之外，曲线 C 在直线 L 的下方等价于

$(x)>0(\forall x>0,x\neq 1)$.　①

$g(x)$满足$g(1)=0$，且$g'(x)=1-f'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}$.②

当 $0<x<1$ 时，$x^2-1<0$，$\ln x<0$，所以$g'(x)<0$，故$g(x)$单调递减；③

当$x>1$ 时，$x^2-1>0$，$\ln x>0$，所以$g'(x)>0$，故$g(x)$单调递增．④

所以 $g(x)>g(1)=0(\forall x>0,x\neq 1)$．⑤

所以除切点之外，曲线 C 在直线 L 的下方.

分析

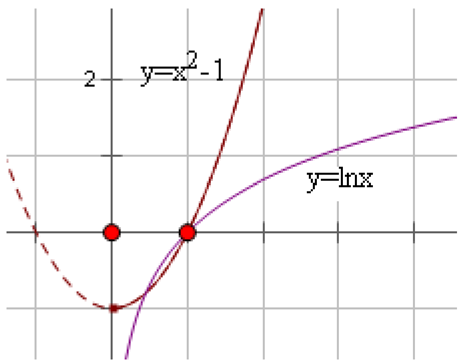
第（1）小问考查导数的几何意义，难度不大。

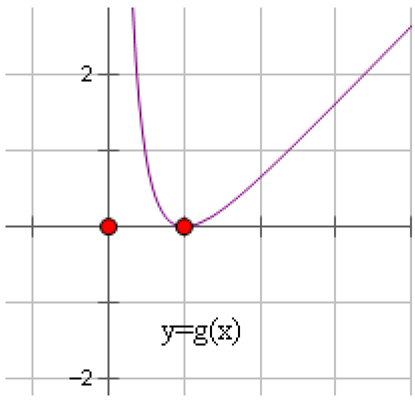
第（2）利用导数研究不等式，主要考查导数的应用。

利用导数研究函数的一般过程是：对一个非基本初等函数（原函数），先求导，合并整理导函数，找出影响导函数正负符号的部分，这部分一般是基本初等函数，我们作出基本初等函数的图象，然后借助其图象，作原函数的图象（可以是草图），根据原函数图象研究原函数的性质。这也是导数的本质作用。北京高考对导数的考查主要检查学生对这部分内容的深刻理解。本题（2）问体现对此的考查。为了说明问题，我把解答步骤编号，分步说明。第①步构造一个“差函数”，是利用导数研究不等式的常用方法。第②步求导，

对于导数$g'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}$，因为$x^2>0$，所以影响导数正负的是函数

y=x^2-1 与y=lnx 这两个基本初等函数之和。画出这两个基本初等函数的图象，容易得导函数的正负。进而画出原函数图象





第③④⑤步，实际上就是在描述这两张图。从而得出结论：除切点之外，曲线 C 在直线 L 的下方.

广东理科试题解答:

（1）当 $k=1$时,

$f(x)=(x-1)e^x-x^2$，$f'(x)=e^x+(x-1)e^x-2x=xe^x-2x=x(e^x-2)$

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=0$，$x_2=\ln 2$

当 x 变化时，$f'(x), f(x)$ 的变化如下表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

右表可知, 函数 $f(x)$ 的递减区间为$(0,\ln 2)$, 递增区间为$(-\infty,0)$，$(\ln 2,+\infty)$.

(2) $f'(x)=e^x+(x-1)e^x-2kx=xe^x-2kx=x(e^x-2k)$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，

$x_2=\ln(2k)$, ①

令 $g(k)=\ln(2k)-k$, ②

则 $g'(k)=\dfrac{1}{k}-1=\dfrac{1-k}{k}>0$, 所以 $g(k)$ 在$\left(\dfrac{1}{2},1\right]$上递增,

所以 $g(k)\le\ln 2-1=\ln 2-\ln e<0$, 从而 $\ln(2k)<k$, 所以 $\ln(2k)\in[0,k]$③

所以当 $x\in(0,\ln(2k))$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln(2k),+\infty)$时，$f'(x)>0$；④

所以 $M=\max\{f(0),f(k)\}=\max\{-1,(k-1)e^k-k^3\}$⑤

令 $h(k)=(k-1)e^{k}-k^{3}+1$，⑥

则 $h'(k)=k\left(e^{k}-3k\right)$，令 $\varphi(k)=e^{k}-3k$，则 $\varphi'(k)=e^{k}-3<e-3<0$

所以 $\varphi(k)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上递减，而 $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\varphi(1)=\left(\sqrt{e}-\frac{3}{2}\right)(e-3)<0$ ⑦

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 使得 $\varphi(x_0)=0$，且当 $k\in\left(\frac{1}{2},x_0\right)$ 时，$\varphi(k)>0$，当 $k\in(x_0,1)$ 时，$\varphi(k)<0$，⑧

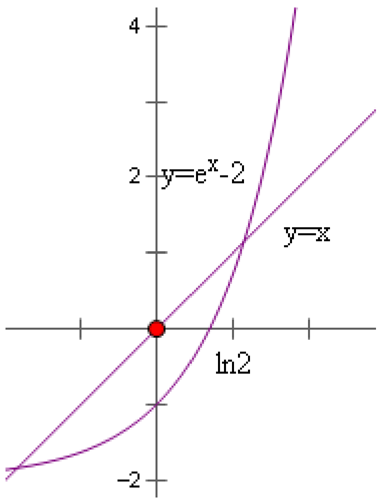
所以 $\varphi(k)$ 在 $\left(\frac{1}{2},x_0\right)$ 上单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减. ⑨

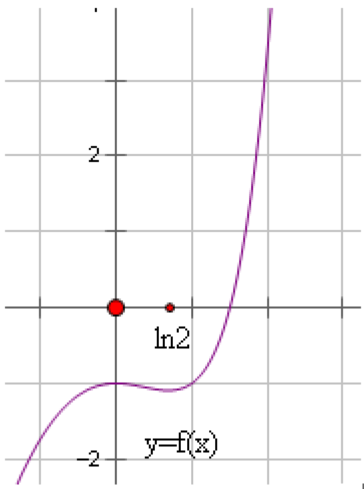
因为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{e}+\frac{7}{8}>0$，$h(1)=0$，所以 $h(k)\geq 0$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上恒成立，当且仅当 $k=1$ 时取得“＝”.

综上，函数 $f(x)$ 在 $[0,k]$ 上的最大值 $M=(k-1)e^{k}-k^{3}$.

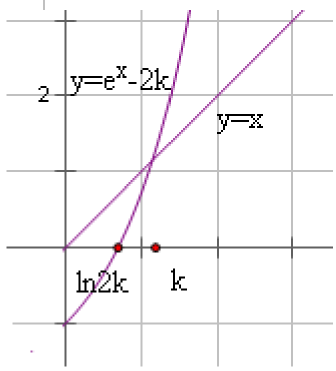
分析　第（1）小题考查利用导数研究函数的单调性。难度较小。

导函数是两个基本初等函数 y=x 与$y=e^{x}-2$的乘积。同一坐标系画出他们的图象，根据图象及他们的性质（单调性，零点）可知导函数的正负。进而确定原函数 $f(x)=(x-1)e^{x}-x^{2}$ 的图象趋势。解答过程用表格列示，实则是对图象的描绘。这一问体现了对导数的本质作用的考查。





第（2）问深入考查导数的应用，解答过程要求考生主动构造函数解决问题



第①步求导，导函数是两个基本初等函数 y=x 和 $y=e^{x}-2k$. 的积　因为x ∈[0，k]，所以要比较 ln2k 与 k 的大小,

第 ②步构造“差函数” $g(k)=\ln(2k)-k$

通过对 $g(k)=\ln(2k)-k$ 研究得到 $\ln(2k)<k$

第③④步体现了导数研究函数的一般过程，第⑤步得到 f(x)最大值为－1 或 $(k-1)e^{k}-k^{3}$。第⑥步为了比较二者大小，再次构造“差函数 $h(k)=(k-1)e^{k}-k^{3}+1$ 第⑦,⑧⑨步对 $h(k)=(k-1)e^{k}-k^{3}+1$ 进行研究，也体现导数研究函数的一般过程最终得出结论。解答中多次构造函数，并辅以函数特殊点进行分析。较复杂。

结论：通过比较分析。我们可以得出如下结论

（1） 两卷导数题都对导数作为研究函数工具的本质进行了考查。

（2）广东卷比北京卷难度大。北京卷共 20 题，导数试卷在 18 题，属于中等难度；广东卷的导数是压轴题，难度大是情理之中的事。北京只要求学生理解本质就行，而广东卷在理解本质的基础上多次利用导数作为工具处理问题。其他省市导数题还有结合面广的特点，如 2014 湖南理试卷中导数试题，考查了复合函数的求导，函数的单调性和极值，解不等式，韦达定理。总之导数题全国其他省市比北京卷难度大，

复习建议：我们考生在复习导数时，要根据北京高考注重基础的特点，对基本初等函数的图象与性质要熟练掌握。复习导数，多参考历届北京高考题及各区模拟题。

全国其他省市的考题我们可参考，拓展思路。但不宜花太多时间与精力在这类题上。