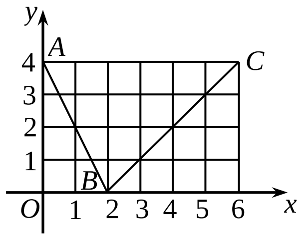
导数的几何意义

黄应桥

导数的几何意义是：曲线 y=f(x)在点（x_0，f(x_0))的切线的斜率等于$f'(x_0)$，也就是说函数在某点切线的斜率就是这点的导函数的值。有关导数的几何意义的考查是高考中常考内容，属于基础题，容易题。我们考生不能在此类题上失分。如何准确地把握这类考题型呢？下面通过例题说明。

例 1　2008 北京理　如图，函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC，其中 A，B，C 的坐标分别为 $(0,4)$,$(2,0)$,$(6,4)$，　______（用数字作答）－2



解析：根据导数的几何意义 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$ **函数** $f(x)$ **在**(1,2)**这一点切线的斜率，**

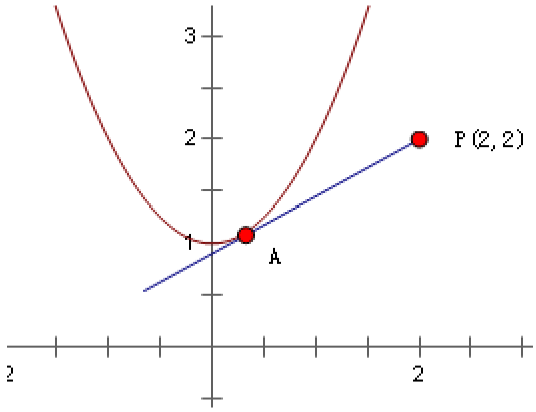
也就是直线 AB 的斜率，故填 - 2

例2. 曲线$f(x)=x^2+1$在点 $P(1,2)$ 处的切线的斜率为___，过点 $P(2,2)$ 处的切线的斜率为____. 2，$4\pm 2\sqrt{3}$

解析：$\because f'(x)=2x$

求f(x)在P（1，2）处的切线的斜率，只需将$x=1$代入$f'(x)$得$k=f'(1)=2$

但求过点P（2，2）处的切线斜率，就没有这么简单了。因为根据导数的几何意义:曲线y=f(x)在点（x_0，f(x_0))的切线的斜率等于$f'(x_0)$，这里的x_0必须是切点的横坐标。



而P（2，2）不在曲线$f(x)=x^2+1$上，显然不是切点，

我们可设切点A（x_0,y_0)，直线AB的斜率为k.

则$k=f'(x_0)=2x_0$，又$k=\dfrac{y_0-2}{x_0-2}$

所以$2x_0=\dfrac{y_0-2}{x_0-2}$　　(1)

因为点A在曲线上,所$y_0={x_0}^2+1$　(2)

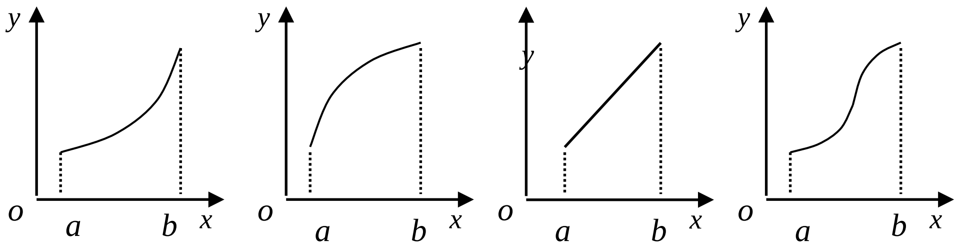
由(1)，(2)联立解得$x_0 = 2 \pm \sqrt{3}$ ，显然有两条切线 。故过点P（2，2）处的切线斜率为 $k = f'(x_0) = 2x_0 = 4 \pm 2\sqrt{3}$

例 3.设函数 $f(x) = g(x) + x^2$，曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线方程为 $y = 2x + 1$，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为（　　）A

A．4　　B．$-\dfrac{1}{4}$　　C．2　　D．$-\dfrac{1}{2}$

解析：由已知 $g'(1) = 2$，而 $f'(x) = g'(x) + 2x$，所以 $f'(1) = g'(1) + 2 \times 1 = 4$，故选 A

例 4.若函数 $y = f(x)$ 的导函数在区间 $[a,b]$ 上是增函数，则函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象可能是（　　） A



A．　B．　C．　D．

解析：因为函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数，即在区间 $[a,b]$ 上各点处的斜率 k 是递增的，由图易知选 A.

例 5 若曲线 $f(x) = ax^3 + \ln x$ 存在垂直于 y 轴的切线，则实数 a 取值范围是____________. $(-\infty, 0)$

解析：由题意可知 $f'(x) = 2ax^2 + \dfrac{1}{x}$，又因为存在垂直于 y 轴的切线，所以

$$2ax^2 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2x^3}(x > 0) \Rightarrow a \in (-\infty, 0)$$