由关于伽马函数的一个结论引发的思考

前言：

欧拉用伽马函数很好地解决了阶乘的插值问题，除了一些常用的关于伽马函数的性质，伽马函数还有很多值得探究的地方，本文从一个已知结论出发，在对结论的证明过程中，出现了几个有用的且有一定规律的式子，从而进行归纳，猜想，再证明！得到最终的结论：$\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha^k\cdot\Gamma(\alpha)}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$对于任何实数成立。

当 n 趋于无穷时，t 分布近似于 N（0，1），而服从自由度为 n 的 t 分布的概率密度是$f(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$，标准正太分布的概率密度函数是$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$，且$(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}\xrightarrow{n\to\infty}(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n}{t^2}(-\frac{n+1}{2n}t^2)}\xrightarrow{n\to\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}$则$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，等价于$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n}{2})}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$。

下面给出证明：

$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$，很容易得到以下三个性质：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$，$\Gamma(\alpha)=\sqrt{\pi}$，$\Gamma(n+1)=n!$ 所以可得

$$\Gamma(\mathrm{n}+\frac{1}{2})=\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}\cdots\frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n-\frac{3}{2})}\cdot\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-\frac{1}{2})}=\sqrt{\pi}\cdot(\frac{1}{2})\cdot(\frac{3}{2})\cdot(\frac{5}{2})\cdots(\frac{2\mathrm{n}-3}{2})\cdot(\frac{2\mathrm{n}-1}{2})$$

$$=\sqrt{\pi}\,\frac{(2n-1)!!}{2^{\mathrm{n}}}=\sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{n!4^{n}}$$

记 $I_{\mathrm{n}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\mathrm{dx}$，则有 n=2k. $I_{\mathrm{n}}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$； n=2k+1, $I_{\mathrm{n}}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$.

由于 $\sin(x)\le 1$,所以 $I_{2\mathrm{k}+1}\le I_{2k}\le I_{2k\text{-}1}$

即 $\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\le\frac{(2\mathrm{k}-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\le\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$

$$\left[\frac{(2\mathrm{k})!!}{(2k-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2k+1}\le\frac{\pi}{2}\le\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2k}$$

$$\therefore 0\le\frac{\pi}{2}-\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2k+1}\le\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2k\cdot(2k+1)}\le\frac{1}{2\mathrm{k}}\cdot\frac{\pi}{2}\to 0$$

由夹逼准则可知 $\left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2k+1}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{\pi}{2}$

即有 $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\xrightarrow{k\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 或者

$$(1)\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}=\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}=\frac{(k!)^2\cdot 4^k}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}\xrightarrow{k\to\infty}\sqrt{\pi},$$

$$(2)\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{(k!)^2\cdot 4^k}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\xrightarrow{k\to\infty}\sqrt{\pi},$$

$$(3)\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k+1}}\xrightarrow{k\to\infty}\sqrt{\pi}$$

下面证明 $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\mathrm{n}}\Gamma(\frac{n}{2})}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$，

对于数列$\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n}{2})}$，若奇子列与偶子列收敛于相同的有限数，则数列$\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n}{2})}$也收敛于该数值。

n=2k,子列为$\dfrac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{2k}\Gamma(k)}$,k=1,2,3.....;

$$\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{2k}\Gamma(k)}=\frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{k!4^k}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k}\cdot(k-1)!}=\frac{(2k)!\sqrt{\mathrm{k}}}{(k!)^2\cdot 4^k}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

由（2）可知，

$$\frac{(2k)!\cdot\sqrt{k}}{(k!)^2\cdot 4^k}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad \therefore\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{2k}\cdot\Gamma(k)}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}};$$

n=2k+1,

子列为$\dfrac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{2k+1}\cdot\Gamma(k+\frac{1}{2})}$，k=1,2,3....;

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{2k+1}\cdot\Gamma(k+\frac{1}{2})}=\frac{k!}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{k!4^k}{(2k)!\sqrt{\pi}},$$

由（1）可知，$\dfrac{(k!)^2\cdot 4^k}{(2k)!\sqrt{k+\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\xrightarrow{k\to\infty}1$，$\therefore\dfrac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{2k+1}\cdot\Gamma(k+\frac{1}{2})}\xrightarrow{k\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

由以上可知$\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\mathrm{n}}\Gamma(\frac{n}{2})}\xrightarrow{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{\Gamma(\frac{\mathrm{n}+1}{2})}{\sqrt{\mathrm{n}\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\xrightarrow{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$，结论得证。

在证明过程中，得到了两个结论：

$\dfrac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{2k}\cdot\Gamma(k)}\xrightarrow{k\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，即 $\dfrac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\sqrt{k}\cdot\Gamma(k)}\xrightarrow{k\to\infty}1$

$\dfrac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{2k+1}\cdot\Gamma(k+\frac{1}{2})}\xrightarrow{k\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，即 $\dfrac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}\cdot\Gamma(k+\frac{1}{2})}\xrightarrow{k\to\infty}1$，

可猜测 $\dfrac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$

结合 Γ（$\alpha+1$）$=\alpha\Gamma$（α），可猜测 $\dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha^k\cdot\Gamma(\alpha)}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$；

证明猜想 $\dfrac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$

记 $A_\alpha=\dfrac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)},A_{\alpha+\frac{1}{2}}=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha+\frac{1}{2}}\cdot\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}$，

则，$\dfrac{A_{\alpha+\frac{1}{2}}}{A_\alpha}=\dfrac{\sqrt{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha+\frac{1}{2}}\cdot\left(\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\right)^2}\xrightarrow{\alpha\to\infty}\dfrac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\left(\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\right)^2}=\dfrac{\alpha\cdot(\Gamma(\alpha))^2}{\left(\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\right)^2}=\dfrac{1}{A_\alpha^2}$

$\therefore A_\alpha\cdot A_{\alpha+\frac{1}{2}}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$

若 $A_\alpha\xrightarrow{\alpha\to\infty}\infty$，$\dfrac{A_{\alpha+\frac{1}{2}}}{A_\alpha}\xrightarrow{\alpha\to\infty}\dfrac{1}{A_\alpha^2}\xrightarrow{\alpha\to\infty}0$，则间距为 $\frac{1}{2}$ 的数列 $A_{\alpha+\frac{n}{2}}$ 收敛，这与 $A_\alpha\xrightarrow{\alpha\to\infty}\infty$ 矛盾。

若 $A_\alpha\xrightarrow{\alpha\to\infty}\mathrm{a}$，则间距为 $\frac{1}{2}$ 的数列 $A_{\alpha+\frac{n}{2}}$ 收敛，

$\therefore A_{\alpha+\frac{1}{2}}\xrightarrow{\alpha\to\infty}A_\alpha\xrightarrow{\alpha\to\infty}a$，

$\because A_{\alpha+\frac{1}{2}} \cdot A_{\alpha} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$

$\therefore \mathrm{a}\cdot\mathrm{a}=1, \mathrm{a}\ge 0$

$\therefore \mathrm{a}=1$，即 $A_{\alpha} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$，即 $A_{\alpha}=\dfrac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$

（证法二：

记 $A_{\alpha}=\dfrac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}, A_{\alpha+\frac{1}{2}}=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha+\frac{1}{2}}\cdot\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}$,

$$A_{\alpha}\cdot A_{\alpha+\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha\cdot\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\cdot\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\cdot\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$$

后面可以用上面的证法）

关于猜想二 $\dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha^{k}\cdot\Gamma(\alpha)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$ 的证明

先证明对任意有理数 k,结论成立：

对于正有理数 $\frac{\mathrm{m}}{n}$（其中，m,n 都是正整数）

只需证明 $\dfrac{\Gamma(\alpha+\frac{m}{n})}{\alpha^{\frac{m}{n}}\cdot\Gamma(\alpha)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$

$$A_{\alpha}=\frac{\Gamma(\alpha+\frac{\mathrm{m}}{n})}{\alpha^{\frac{m}{n}}\cdot\Gamma(\alpha)}, A_{\alpha+\frac{m}{n}}=\frac{\Gamma(\alpha+\frac{2m}{n})}{(\alpha+\frac{m}{n})^{\frac{m}{n}}\cdot\Gamma(\alpha+\frac{m}{n})} \ldots\ldots A_{\alpha+\frac{\mathrm{km}}{n}}=\frac{\Gamma(\alpha+\frac{k+1}{n}m)}{(\alpha+\frac{km}{n})^{\frac{m}{n}}\cdot\Gamma(\alpha+\frac{km}{n})} \ldots\ldots(k\le n-1)$$

$$A_\alpha\cdot A_{\alpha+\frac{m}{n}}\cdot A_{\alpha+\frac{2m}{n}}\cdots A_{\alpha+\frac{n-1}{n}m}=\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\left\{(\alpha)\cdot\left(\alpha+\frac{m}{n}\right)\cdot\left(\alpha+\frac{2m}{n}\right)\cdots\left(\alpha+\frac{n-1}{n}m\right)\right\}^{\frac{m}{n}}\cdot\Gamma(\alpha)}$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m-1)}{\left\{(\alpha)\cdot\left(\alpha+\frac{m}{n}\right)\cdot\left(\alpha+\frac{2m}{n}\right)\cdots\left(\alpha+\frac{n-1}{n}m\right)\right\}^{\frac{m}{n}}}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$$

若 $A_\alpha\xrightarrow{\alpha\to\infty}\infty$,

则，

$$A_\alpha\xrightarrow{\alpha\to\infty}A_{\alpha+\frac{m}{n}}\xrightarrow{\alpha\to\infty}A_{\alpha+\frac{2m}{n}}\xrightarrow{\alpha\to\infty}\cdots\xrightarrow{\alpha\to\infty}A_{\alpha+\frac{n-1}{n}m}\xrightarrow{\alpha\to\infty}\infty$$

$$A_\alpha\cdot A_{\alpha+\frac{m}{n}}\cdot A_{\alpha+\frac{2m}{n}}\cdots A_{\alpha+\frac{n-1}{n}m}\xrightarrow{\alpha\to\infty}\infty$$

这与 $A_\alpha\cdot A_{\alpha+\frac{m}{n}}\cdot A_{\alpha+\frac{2m}{n}}.....A_{\alpha+\frac{n-1}{n}m}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$ 矛盾

$\therefore A_\alpha\xrightarrow{\alpha\to\infty}a$

则 $A_\alpha\xrightarrow{\alpha\to\infty}A_{\alpha+\frac{m}{n}}\xrightarrow{\alpha\to\infty}A_{\alpha+\frac{2m}{n}}\xrightarrow{\alpha\to\infty}\cdots\xrightarrow{\alpha\to\infty}A_{\alpha+\frac{n-1}{n}m}\xrightarrow{\alpha\to\infty}a$

$\therefore A_\alpha\cdot A_{\alpha+\frac{m}{n}}\cdot A_{\alpha+\frac{2m}{n}}\cdots A_{\alpha+\frac{n-1}{n}m}\xrightarrow{\alpha\to\infty}a^n\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$

即 a=1, $\therefore A_\alpha\xrightarrow{\alpha\to\infty}A_{\alpha+\frac{m}{n}}\xrightarrow{\alpha\to\infty}A_{\alpha+\frac{2m}{n}}\xrightarrow{\alpha\to\infty}\cdots\xrightarrow{\alpha\to\infty}A_{\alpha+\frac{n-1}{n}m}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$

$\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha^k\cdot\Gamma(\alpha)}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$ 对任意正有理数 k,结论成立

当 k 为负有理数，令 $k=-\frac{m}{n}$（m,n 都是正有理数）

只需证明 $\frac{\Gamma(\alpha+\frac{-m}{n})}{\alpha^{\frac{-m}{n}}\cdot\Gamma(\alpha)}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$

$$A_\alpha=\frac{\Gamma(\alpha+\frac{-m}{n})}{\alpha^{\frac{-m}{n}}\cdot\Gamma(\alpha)},A_{\alpha+\frac{-m}{n}}=\frac{\Gamma(\alpha+\frac{-2m}{n})}{(\alpha+\frac{-m}{n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\Gamma(\alpha+\frac{-m}{n})}......A_{\alpha+\frac{-km}{n}}=\frac{\Gamma\left[\alpha+\left(-\frac{k+1}{n}m\right)\right]}{(\alpha+\frac{-km}{n})^{\frac{-m}{n}}\cdot\Gamma(\alpha+\frac{-km}{n})}.....(k\le n-1)$$

$$A_\alpha \cdot A_{\alpha+\frac{-m}{n}} \cdot A_{\alpha+\frac{-2m}{n}} \cdots A_{\alpha+(-\frac{n-1}{n}m)} = \frac{\Gamma(\alpha-m)}{\left\{(\alpha)\cdot\left(\alpha+\frac{-m}{n}\right)\cdot\left(\alpha+\frac{-2m}{n}\right)\cdots\left(\alpha+\left(-\frac{n-1}{n}m\right)\right)\right\}^{\frac{m}{n}}\cdot\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{(\alpha-m)^{-1}(\alpha-m+1)^{-1}(\alpha-m+2)^{-1}\cdots(\alpha-1)^{-1}}{\left\{(\alpha)\cdot\left(\alpha+\frac{-m}{n}\right)\cdot\left(\alpha+\frac{-2m}{n}\right)\cdots\left(\alpha+\left(-\frac{n-1}{n}m\right)\right)\right\}^{\frac{-m}{n}}} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$$

若 $A_\alpha \xrightarrow{\alpha\to\infty} \infty$,

则,

$$A_\alpha \xrightarrow{\alpha\to\infty} A_{\alpha+\frac{-m}{n}} \xrightarrow{\alpha\to\infty} A_{\alpha+\frac{-2m}{n}} \xrightarrow{\alpha\to\infty} \cdots \xrightarrow{\alpha\to\infty} A_{\alpha+(-\frac{n-1}{n}m)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} \infty$$

$$A_\alpha \cdot A_{\alpha+\frac{-m}{n}} \cdot A_{\alpha+\frac{-2m}{n}} \cdots A_{\alpha+(-\frac{n-1}{n}m)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} \infty$$

这与 $A_\alpha \cdot A_{\alpha+\frac{-m}{n}} \cdot A_{\alpha+\frac{-2m}{n}} \cdots\cdots A_{\alpha+(-\frac{n-1}{n}m)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$ 矛盾

$\therefore A_\alpha \xrightarrow{\alpha\to\infty} \mathrm{a}$

则 $A_\alpha \xrightarrow{\alpha\to\infty} A_{\alpha+\frac{-m}{n}} \xrightarrow{\alpha\to\infty} A_{\alpha+\frac{-2m}{n}} \xrightarrow{\alpha\to\infty} \cdots \xrightarrow{\alpha\to\infty} A_{\alpha+(-\frac{n-1}{n}m)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} \mathrm{a}$

$\therefore A_\alpha \cdot A_{\alpha+\frac{-m}{n}} \cdot A_{\alpha+\frac{-2m}{n}} \cdots A_{\alpha+(-\frac{n-1}{n}m)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} \mathrm{a}^n \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$

即 a=1, $\therefore A_\alpha \xrightarrow{\alpha\to\infty} A_{\alpha+\frac{-m}{n}} \xrightarrow{\alpha\to\infty} A_{\alpha+\frac{-2m}{n}} \xrightarrow{\alpha\to\infty} \cdots \xrightarrow{\alpha\to\infty} A_{\alpha+(-\frac{n-1}{n}m)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$

$\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha^k\cdot\Gamma(\alpha)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$ 对任意负有理数 k,结论成立

综上, $\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha^k\cdot\Gamma(\alpha)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$ 对任意有理数 k,结论成立

对于任何无理数 k,则存在有理数列 r_n,使得 $r_n \xrightarrow{n\to\infty} k$,

由 $\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha^k\cdot\Gamma(\alpha)}$ 关于 k 的连续性,所以对于无理数 k, $\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha^k\cdot\Gamma(\alpha)} \xleftarrow{r_n\to\infty} \frac{\Gamma(\alpha+r_n)}{\alpha^{r_n}\cdot\Gamma(\alpha)} \xrightarrow{\alpha\to\infty} 1$,

$$\therefore \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha^k\cdot\Gamma(\alpha)}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$$

所以$\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\alpha^k\cdot\Gamma(\alpha)}\xrightarrow{\alpha\to\infty}1$对于任何实数成立。