第 I 卷　160 分部分

A3.复数运算

*1.运算律：(1) $z^m\cdot z^n=z^{m+n}$；　(2) $(z^m)^n=z^{mn}$；　(3) $(z_1\cdot z_2)^m=z_1^m z_2^m (m,n\in N)$.

【提示】注意复数、向量、导数、三角等运算率的适用范围.

*2.模的性质：

(1) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$；　(2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$；　(3) $\left|z^n\right|=\left|z\right|^n$.

*3.重要结论：

(1) $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$；

(2) $\overline{z_1}\cdot z_2=\left|z\right|^2=\left|\overline{z}\right|^2$；　(3) $(1\pm i)^2=\pm 2i$；　(4) $\dfrac{1-i}{1+i}=-i$，$\dfrac{1+i}{1-i}=i$；

(5) i 性质：T=4；$i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i,\ i^{4n}=1$.

【拓展】：$\omega^3=1\Leftrightarrow(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0\Leftrightarrow\omega=1$ $\omega=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

B1.**线性规划**

（5）$F(\cos\theta,\sin\theta)$；

【点拨】：通过构造距离函数、斜率函数、截距函数、单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的点 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 及余弦定理进行转化达到解题目的。

B 2.**三角变换：**

（1）角的“配”与“凑”：掌握角的“和”、“差”、“倍”和“半”公式后，还应注意一些配凑变形技巧，如下：

$2\alpha=\alpha+\alpha$，$\alpha=2\cdot\dfrac{\alpha}{2}$；

$\alpha+\beta=2\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)-\left(\dfrac{\alpha}{2}-\beta\right)$；

$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta=(\alpha-\beta)+\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{\beta+\alpha}{2}-\dfrac{\beta-\alpha}{2}$；

$2\alpha=2[(\alpha+\beta)-\beta]=2[(\alpha-\beta)+\beta]=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=(\beta+\alpha)-(\beta-\alpha)$；

$2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha$，$2\alpha-\beta=(\alpha-\beta)+\alpha$；

$15^\circ=45^\circ-30^\circ, 75^\circ=45^\circ+30^\circ$；

$\dfrac{\pi}{4}+\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$ 等.

（4）常值变换

常值$\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{2},1,\sqrt{3}$可作特殊角的三角函数值来代换.此外，对常值“1”可作如下代换：

$$1=\sin^2 x+\cos^2 x=\sec^2 x-\tan^2 x=\tan x\cdot\cot x=2\sin 30^\circ=\tan\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2}=\cos 0=\cdots$$

（5）引入辅助角

一般的，

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)=\sin(\alpha+\varphi)$$，期中

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\tan\varphi=\frac{b}{a}.$$

特别的，$\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin(A+\frac{\pi}{4})$；

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，

$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$等.

（6）特殊结构的构造

构造对偶式，可以回避复杂三角代换，化繁为简.

举例：$A=\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ$，

$B=\cos^2 20^\circ+\sin^2 50^\circ+\cos 20^\circ\sin 50^\circ$

可以通过$A+B=2+\sin 70^\circ,A-B=-\frac{1}{2}-\sin 70^\circ$两式和，作进一步化简.

B 3.三角形中的三角变换

三角形中的三角变换，除了应用公式和变换方法外，还要注意三角形自身的特点.

(1)角的变换

因为在ΔABC中，$A+B+C=\pi$（三内角和定理），所以

任意两角和：与第三个角总互补，**任意两半角和**与第三个角的半角总互余.

锐角三角形：①三内角都是锐角；②三内角的余弦值为正值；

③任两角和都是钝角；④任意两边的平方和大于第三边的平方.

即，$\sin A=\sin(B+C)$；$\cos A=-\cos(B+C)$；$\tan A=-\tan(B+C)$.

$\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$；$\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$；$\tan\frac{A}{2}=\cot\frac{B+C}{2}$.

(2)三角形边、角关系定理及面积公式，正弦定理，余弦定理.

面积公式：$S=\frac{1}{2}sh_a=\frac{1}{2}ab\sin C=r\cdot p=\sqrt{p(p-a)(p-a)(p-a)}$.

其中r为三角形内切圆半径，p为周长之半.

(3)对任意 ΔABC，；

在非直角 ΔABC 中，$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

(4)在 ΔABC 中，熟记并会证明：

*1. $\angle A,\angle B,\angle C$ 成等差数列的充分必要条件是 $\angle B=60^\circ$.

*2. ΔABC 是正三角形的充分必要条件是 $\angle A,\angle B,\angle C$ 成等差数列且 $a,b,c,$ 成等比数列.

***3.** 三边 a,b,c 成等差数列 $\Leftrightarrow$ $2b=a+c$ $\Leftrightarrow$ $2\sin A=\sin B+\sin C$ $\Leftrightarrow$ $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{3}$；$B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$.

*4.三边 $a,b,c,$ 成等比数列 $\Leftrightarrow$ $b^2=ac$ $\Leftrightarrow$ $\sin^2 A=\sin B\sin C$，$B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$.

(5)锐角 ΔABC 中，$A+B>\dfrac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\sin A>\cos B,\sin B>\cos C,\sin C>\cos A$，$a^2+b^2>c^2$；

$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C$；

$\tan A+\tan B+\tan C>\cot A+\cot B+\cot C$.

【思考】：钝角 ΔABC 中的类比结论

(6)两内角与其正弦值：在 ΔABC 中 $a>b\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow\sin A>\sin B\Leftrightarrow\cos 2B>\cos 2A$，…

(7)若 $A+B+C=\pi$，则 $x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2xz\cos B+2xy\cos C$.

(8) $A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow\sin A>\sin B\Leftrightarrow\cos 2B>\cos 2A$.

组三 常见三角不等式

(1)若 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\sin x<x<\tan x$；

(2) 若 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $1<\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$；

(3) $|\sin x|+|\cos x|\geqslant 1$；

(4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上是减函数；

B7.最值定理

① $x,y>0$，由 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，若积 $xy=P$(**定值**)，则当 $x=y$ 时和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$；

② $x,y>0$，由 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，若和 $x+y=S$(**定值**)，则当 $x=y$ 是积 xy 有最大值 $\dfrac{1}{4}s^2$.

【推广】：已知 $x,y\in R$，则有 $(x+y)^2=(x-y)^2+2xy$.

（1）若积 xy 是定值，则当 $|x-y|$ 最大时，$|x+y|$ 最大；当 $|x-y|$ 最小时，

$|x+y|$最小.

（2）若和$|x+y|$是定值，则当$|x-y|$最大时，$|xy|$最小；当$|x-y|$最小时，$|xy|$最大.

③已知$a,x,b,y\in R^{+}$，若$ax+by=1$，则有：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(ax+by)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=a+b+\frac{by}{x}+\frac{ax}{y}\geqslant a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2}$$

④$a,x,b,y\in R^{+}$，若$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$则有：

$$x+y=(x+y)(\frac{ay}{x}+\frac{bx}{y})=a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2}$$

B8.求函数值域的常用方法：

①配方法：转化为二次函数问题，利用二次函数的特征来求解；

【点拨】：二次函数在给出区间上的最值有两类：一是求闭区间$[m,n]$上的最值；二是求区间定（动），对称轴动（定）的最值问题。求二次函数的最值问题，勿忘数形结合，注意开口方向和对称轴与所给区间的相对位置关系.

②逆求法：通过反解，用y来表示x，再由x的取值范围，通过解不等式，得出y的取值范围，型如$y=\frac{ax+b}{cx+d},x\in(m,n)$的函数值域；

④换元法：化繁为间，构造中间函数，把一个较复杂的函数变为简单易求值域的函数，其函数特征是函数解析式含有根式或三角函数公式模型，通过代换构造容易求值域的简单函数，再求其值域；

⑤三角有界法：直接求函数的值域困难时，可以利用已学过函数的有界性，如转化为只含正弦、余弦的函数，再运用其有界性来求值域；

⑥不等式法：利用基本不等式$a+b\geq 2\sqrt{ab}(a,b\in R^{+})$求函数的最值，其题型特征解析式是和式时要求积为定值，型如$y=x+\frac{k}{x}(k>0)$，解析式是积时要求和为定值，不过有时须要用到拆项、添项和两边平方等技巧；

⑦单调性法：根据函数的单调性求值域，常结合导数法综合求解；

⑧数形结合法：函数解析式具有明显的某种几何意义，可根据函数的几何意义，如斜率、距离、绝对值等，利用数与形相互配合的方法来求值域；

⑨分离常数法：对于分子、分母同次的分式形式的函数求值域问题，把函数分离成一个常数和一个分式和的形式，进而可利用函数单调性确定其值域.

⑩ 判别式法：对于形如 $y=\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ （a_1,a_2 不同时为 0 ）的函数常采用此法.

【说明】：对分式函数（分子或分母中有一个是二次）都可通用，但这类题型有时也可以用其它方法进行求解，不必拘泥在判别式法上，也可先通过部分分式后，再利用均值不等式：

1. $y=\dfrac{b}{k+x^2}$ 型，可直接用不等式性质；

2. $y=\dfrac{bx}{x^2+mx+n}$ 型，先化简，再用均值不等式；

3. $y=\dfrac{x^2+m'x+n'}{x^2+mx+n}$ 型，通常用判别式法；

4. $y=\dfrac{x^2+m'x+n'}{mx+n}$ 型，可用判别式法或均值不等式法；

⑪ 导数法：一般适用于高次多项式函数求值域.

¼ ¼

B9.函数值域的题型

(一) 常规函数求值域：画图像，定区间，截段.

常规函数有：一次函数，二次函数，反比例函数，指数对数函数，三角函数，对号函数.

(二) 非常规函数求值域：想法设法变形成常规函数求值域.

解题步骤：(1)换元变形；

(2)求变形完的常规函数的自变量取值范围；

(3)画图像，定区间，截段。

(三) 分式函数求值域 ：四种题型

(1) $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}\ (a\neq 0)$ ：则 $y\neq\dfrac{c}{a}$ 且 $y\in R$.

(2) $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}(x\geq 2)$：利用反表示法求值域。先反表示，再利用 x 的范围解不等式求 y 的范围.

(3) $y=\dfrac{2x^2+3x-2}{6x^2-x-1}$：

$y=\dfrac{(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(3x+1)}=\dfrac{x+2}{3x+1}(x\neq\dfrac{1}{2})$ ，则 $y\neq\dfrac{1}{3}$ 且 $y\neq 1$ 且 $y\in R$.

(4)求 $y=\dfrac{2x-1}{x^2+x+1}$ 的值域，当 $x\in R$ 时，用判别式法求值域。

$y=\dfrac{2x-1}{x^2+x+1}\Rightarrow\ yx^2+(y-2)x+y+1=0$，$\Delta=(y-2)^2-4y(y+1)\geq 0\Rightarrow$ 值域.

B10.应用基本不等式求最值的“八种变形技巧”：

⑴凑系数（乘、除变量系数）.例 1.当 $0<x<4$ 时，求函的数 $y=x(8-2x)$ 最大值.

⑵凑项（加、减常数项）：例 2.已知 $x<\frac{5}{4}$ ，求函数 $f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值.

⑶调整分子：例 3.求函数 $f(x)=\frac{x^2+7x+10}{x+1}(x\neq-1)$ 的值域；

⑷变用公式：基本不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 有几个常用变形： $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$ ， $(\frac{a+b}{2})^2\geq ab$ ， $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$ ， $\frac{a^2+b^2}{2}\geq(\frac{a+b}{2})^2$.前两个变形很直接，后两个变形则不易想到，应重视；例 4.求函数 $y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-2x}(\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2})$ 的最大值；

⑸连用公式：例 5.已知 $a>b>0$ ，求 $y=a^2+\frac{16}{b(a-b)}$ 的最小值；

⑹对数变换：例 6.已知 $x>\frac{1}{2},y>1$ ，且 $xy=e$ ，求 $t=(2x)^{\ln y}$ 的最大值；

⑺三角变换：例 7.已知 $0<y\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ ，且 $\tan x=3\tan y$ ，求 $t=x-y$ 的最大值；

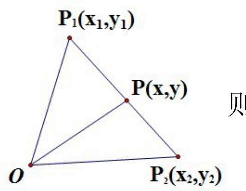
⑻常数代换（逆用条件）：例 8.已知 $a>0,b>0$ ，且 $a+2b=1$ ，求 $t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值.

C、10～12，思维拓展题，稍有难度，要在方法切入上着力

C1.线段的定比分点公式

设 $P_1(x_1,y_1)$ ， $P_2(x_2,y_2)$ ， $P(x,y)$ 是线段 P_1P_2 的分点， λ 是实数，且 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$

（或 $\overrightarrow{P_2P}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{PP_1}$ ），



则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OP_1}+(1-t)\overrightarrow{OP_2}\ \left(t=\frac{1}{1+\lambda}\right)$$

推广 1：当 $\lambda=1$ 时，得线段 P_1P_2 的中点公式：$\begin{cases} y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \\ x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \end{cases}$

推广 2：$\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=\lambda$ 则 $\overrightarrow{PM}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\lambda\overrightarrow{PB}}{1+\lambda}$（$\lambda$ 对应终点向量）.

C 2. 抽象函数

抽象函数通常是指没有给出函数的具体的解析式，只给出了其它一些条件（如函数的定义域、单调性、奇偶性、解析递推式等）的函数问题.

求解抽象函数问题的常用方法是：

(1)借助模型函数探究抽象函数：

① 正比例函数型：$f(x)=cx \to f(x\pm y)=f(x)\pm f(y), f(1)=c$.

② 指数函数型：$f(x)=a^x \to f(x+y)=f(x)f(y), f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}, f(1)=a\neq 0$.

③ 对数函数型：$f(x)=\log_a x \to$

$f(xy)=f(x)+f(y), f(\dfrac{x}{y})=f(x)-f(y), f(a)=1(a>0,a\neq 1)$.

④ 幂函数型：$f(x)=x^\alpha \to f(xy)=f(x)f(y), f'(1)=\alpha, f(\dfrac{x}{y})=\dfrac{f(x)}{f(y)}$.

⑤ 三角函数型：$f(x)=\cos x, g(x)=\sin x, f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$,

$f(0)=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

$$f(x)=tanx, f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}.$$

（2）利用函数的性质（如奇偶性、单调性、周期性、对称性等）进行演绎探究：

（3）**利用一些方法（如赋值法（令 $x=0$ 或 1，求出 $f(0)$ 或 $f(1)$、令 $y=x$ 或 $y=-x$ 等）、递推法、反证法等）进行逻辑探究。**

C 3.函数图像的对称性

【小结】函数对称性的充要条件

函数关系式($x\in\mathbf{R}$)	对称性
$f(x)=-f(-x)$	函数 $f(x)$ 图像是奇函数
$f(x)=f(-x)$	函数 $f(x)$ 图像是偶函数
$f(x)=f(2a-x)$ 或 $f(a+x)=f(a-x)$	函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=a$ 对称
$f(x)=2b-f(2a-x)$ 或 $f(a+x)=2b-f(a-x)$	函数 $f(x)$ 图像关于点 $P(a,b)$ 对称

【注】：这里代数关系式中两个“f”（对应法则）内的“x”（变量）前的正负号相异，如果把两个“f”放在“=”的两边，则“f”前的正负号也相异.因为对称性关乎翻转.

(2)两个函数图像之间的对称性

1.函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图像关于直线 $y=0$ 对称.

2.函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 的图像关于直线 $x=0$ 对称.

3.函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(-x)$ 的图像关于原点 $(0,0)$ 对称.

4.函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

5.函数 $y=f(a+mx)$ 与 $y=f(b-mx)$ 的图像($a,b,m\in R,m\neq 0$) 关于直线 $x=\frac{b-a}{2m}$ 对称.

特别地，函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称.

C4.几个函数方程的周期(约定 $a\neq 0$)

(1)若 $f(x)=f(x+a)$，或 $f(x+\frac{a}{2})=f(x-\frac{a}{2})$，则 $f(x)$ 的周期 $T=a$；

(2)若 $f(x)+f(x+a)=0$，或 $f(x+a)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$，或 $f(x+\frac{a}{2})=-f(x-\frac{a}{2})$ ，或

$f(x+a)=f(x-a)$，

或 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}\ (f(x)\neq 0)$，或 $\begin{cases} f(a+x)=f(a-x) \\ f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$，或 $\begin{cases} f(a+x)=-f(a-x) \\ f(x)\text{为奇函数} \end{cases}$，

或 $\begin{cases} f(a+x)=f(a-x) \\ f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$，或 $\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}=f(x+a),(f(x)\in[0,1])$，则 $f(x)$ 的周

期$T=2a$；

(3)若$f(x)=1-\dfrac{1}{f(x+a)}(f(x)\neq 0)$，则$f(x)$的周期$T=3a$；

(4)若$\begin{cases} f(a+x)=-f(a-x) \\ f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$，或$\begin{cases} f(a+x)=f(a-x) \\ f(x)\text{为奇函数} \end{cases}$，或$f(x+a)=-f(x-a)$，或

$$f(x+a)=-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\text{，或}f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\text{，或}f(x_1+x_2)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}\text{且}$$

$f(a)=1(f(x_1)\cdot f(x_2)\neq 1,0<|x_1-x_2|<2a)$，则$f(x)$的周期$T=4a$；

(5)若$f(x)+f(x+a)+f(x+2a)+f(x+3a)+f(x+4a)=f(x)f(x+a)f(x+2a)f(x+3a)f(x+4a)$，则$f(x)$的周期$T=5a$；

(6)若$f(x+a)=f(x)-f(x+a)$，则$f(x)$的周期$T=6a$.

【说明】函数$y=f(x)$满足对定义域内任一实数x（其中a为常数），都有等式成立.上述结论可以通过反复运用已知条件来证明.

C6.函数图象的对称轴和对称中心举例

函 数 满 足 的 条 件	对称轴(中心)
满足$f(a+x)=f(a-x)$的函数$y=f(x)$的图像 [或$f(x)=f(2a-x),f(-x)=f(2a+x)$]	$x=a$
满足$f(a+x)=-f(a-x)$的函数$y=f(x)$的图像 [或$f(x)=-f(2a-x),f(-x)=-f(2a+x)$]	$(a,0)$
满足$f(a+x)=f(b-x)$的函数$y=f(x)$的图像	$x=\frac{a+b}{2}$
满足$f(a+x)=-f(b-x)$的函数$y=f(x)$的图像	$\left(\frac{a+b}{2},0\right)$
满足$f(x)=f(-x)$的函数$y=f(x)$的图像(偶函数)	$x=0$
满足$f(x)=-f(-x)$的函数$y=f(x)$的图像(奇函数)	$(0,0)$
满足$y=f(a+x)$与$y=f(b-x)$的两个函数的图像	$x=\frac{b-a}{2}$
满足$y=f(x)$与$y=f(-x)$的两个函数的图像	$x=0$

满足 $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的两个函数的图像	$y=0$

C7.函数周期性、对称性与奇偶性的关系

1、定义在 R 上的函数 $f(x)$,若同时关于直线 $x=a$ 和 $x=2a$ 对称,即对于任意的实数 x,函数 $f(x)$ 同时满足 $f(a-x)=f(a+x)$, $f(2a-x)=f(2a+x)$,则函数 $f(x)$ 是以 $T=2a$ 为周期的周期函数,且是偶函数.

2、定义在 R 上的函数 $f(x)$,若同时关于直线 $x=a$ 和点 $(2a,0)$ 对称,即对于任意的实数 x,函数 $f(x)$ 同时满足 $f(a-x)=f(a+x)$, $f(2a-x)=-f(2a+x)$,则函数 $f(x)$ 是以 $T=4a$ 为周期的周期函数,且是奇函数.

3、定义在 R 上的函数 $f(x)$,若同时关于点 $(a,0)$ 和直线 $x=2a$ 对称,即对于任意的实数 x,函数 $f(x)$ 同时满足 $f(a-x)=-f(a+x)$, $f(2a-x)=f(2a+x)$,则函数 $f(x)$ 是以 $T=4a$ 为周期的周期函数,且是偶函数.

4、定义在 R 上的函数 $f(x)$,若同时关于点 $(a,0)$ 和点 $(2a,0)$ 对称,即对于任意的实数 x,函数 $f(x)$ 同时满足 $f(a-x)=-f(a+x)$, $f(2a-x)=-f(2a+x)$,则函数 $f(x)$ 是以 $T=2a$ 为周期的周期函数,且是奇函数.

5、若偶函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称,即对于任意的实数 x,函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x)=f(a+x)$,则 $f(x)$ 是以 $T=2a$ 为周期的周期函数.

6、若偶函数 $f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称,即对于任意的实数 x,函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x)=-f(a+x)$,则 $f(x)$ 是以 $T=4a$ 为周期的周期函数.

7、若奇函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称,即对于任意的实数 x,函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x)=f(a+x)$,则 $f(x)$ 是以 $T=4a$ 为周期的周期函数.

8、若奇函数 $f(x)$ 关于点 $(a,0)$ 对称,即对于任意的实数 x,函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x)=-f(a+x)$,则 $f(x)$ 是以 $T=2a$ 为周期的周期函数.

【拓展】:

1、若函数 $y=f(x+a)$ 为偶函数,则函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称.

2、若函数 $y=f(x+a)$ 为奇函数，则函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称.

3、定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x)=f(a+x)$，且方程 $f(x)=0$ 恰有 $2n$ 个实根，则这 $2n$ 个实根的和为 $2na$.

4、定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)+f(b-x)=c(a,b,c为常数)$，则函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2})$ 对称.

C 9.几何体中数量运算导出结论

3.在正四面体中：设棱长为 a，则正四面体中的一些数量关系：

① 全面积 $S=\sqrt{3}a^2$；②体积 $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$；③对棱间的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}a$；

④ 相邻面所成二面角 $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$；⑤外接球半径 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$；⑥内切球半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$；

⑦ 正四面体内任一点到各面距离之和为定值 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

4.在立方体中：

设正方体的棱长为 a，则

① 体对角线长为 $\sqrt{3}a$，②全面积为 $6a^2$，③体积 $V=a^3$，④内切球半径为 r_1,外接球半径为 r_2,与十二条棱均相切的球半径为 r_3,则

$$2r_1=a,2r_2=\sqrt{3}a,2r_2=\sqrt{2}a,且r_1:r_2:r_3=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$$

【点拨】：立方体承载着诸多几何体的位置关系特征，只要作适当变形，如切割、组合、扭转等处理，便可产生新几何体.貌似新面孔，但其本原没变.所以，在求解三棱椎、三棱柱、球体等问题时，如果一般识图角度受阻，不妨尝试根据几何体的结构特征，构造相应的“正方体”，将问题化归到基本几何体中，会有意想不到的效果.

6.直角四面体的性质：

在直角四面体 $O-ABC$ 中, OA,OB,OC 两两垂直,令 $OA=a,OB=b,OC=c$,则

⑴ 底面三角形 ABC 为锐角三角形;

⑵ 直角顶点 O 在底面的射影 H 为三角形 ABC 的垂心；

⑶ $S^2_{\Delta BOC} = S_{\Delta BHC} \pi S_{\Delta ABC}$；

⑷ $S^2_{\Delta AOB} + S^2_{\Delta BOC} + S^2_{\Delta COA} = S^2_{\Delta ABC}$；

⑸ $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$；

⑹ 外接球半径 R= $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

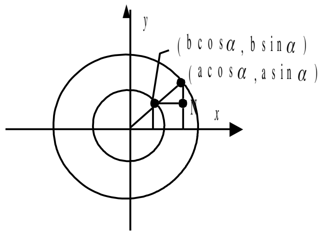
7. 球的组合体

(1)球与长方体的组合体:

长方体的外接球的直径是长方体的体对角线长.

(2)球与正方体的组合体:

正方体的内切球的直径是正方体的棱长, 正方体的棱切球的直径是正方体的面对角线长, 正方体的外接球的直径是正方体的体对角线长.



N的轨迹是椭圆

(3)球与正四面体的组合体:

棱长为 a 的正四面体的内切球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$,

外接球的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

C10.圆锥曲线几何性质

圆锥曲线的焦半径公式如下图:

特征直角三角形、焦半径的最值、焦点弦的最值及其“顶点、焦点、准线等相互之间与坐标系无关的几何性质”，尤其是双曲线中焦半径最值、焦点弦最值的特点.

(3)易误提点：

① a � <0 是 $<a,b>$ 为钝角的必要非充分条件.

② 截距不一定大于零，可为负数，可为零；

③$\vec{0}$ 常常会是等式不成立的原因，$\vec{0}$ 模为 0，方向和任意向量平行，却不垂直；

④ 在导数不存在的点，函数也可能取得极值；导数为 0 的点不一定是极值点，一定要既考虑 $f'(x_0)=0$，又要考虑检验“左正右负”或“左负右正”；

⑤ 直线在坐标轴上的截距可正、可负、也可为 0.

D、13～14，把关题，考点灵活/题型新颖/方法隐蔽

D1.熟知几个重要函数

1. $f(x)=ax+\frac{b}{x}$

(1) $a>0,b>0$ 时，$f(x)$ 为“双钩函数”：

① 定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；值域为 $(-\infty,-\sqrt{\frac{b}{a}}]\cup[\sqrt{\frac{b}{a}},+\infty)$；

② 奇偶性：奇函数（有对称中心）；

③ 单调性：在区间 $(-\infty,-\sqrt{\frac{b}{a}}],[\sqrt{\frac{b}{a}},+\infty)$ 上单调递增；

在区间 $[-\sqrt{\frac{b}{a}},0),(0,\sqrt{\frac{b}{a}}]$ 上单调递减.

④ 极值：$x=-\sqrt{\frac{b}{a}}$ 时取到极大值，$x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ 时取到极小值.

⑤ 记住 $f(x)=ax+\frac{b}{x}\ (a>0,b>0)$ 的图像的草图.

⑥ 不等式性质：$x>0$ 时，$f(x)=ax+\frac{b}{x}\geqslant 2\sqrt{ab}$；

$x<0$ 时，$f(x)=ax+\frac{b}{x}\leqslant -2\sqrt{ab}$.

(2) $a>0,b<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 上为增函数.

【思考】：图像大致如何分布.

(3)常用地，当 $a=b=1$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的特殊性质略.

【探究】：①函数 $f(x)=\frac{1}{ax+\frac{b}{x}}$ 的图像变化趋势怎样？

② $f(x)=ax^2+\frac{b}{x^2},f(x)=ax^n+\frac{b}{x^n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的有关性质.

2. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad\neq bc)$ 化简为，$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}$

①定义域：$(-\infty,-\dfrac{d}{c})\cup(\dfrac{d}{c},+\infty)$；值域为 $y\neq\dfrac{a}{c}$ 的一切实数；

②奇偶性：不作讨论；

③单调性：当 $\dfrac{b}{c}<0$ 时，在区间 $(-\infty,-\dfrac{d}{c}],[\dfrac{d}{c},+\infty)$ 上单调递增；

当 $\dfrac{b}{c}>0$ 时，在区间 $(-\infty,-\dfrac{d}{c}],[\dfrac{d}{c},+\infty)$ 上单调递减.

④对称中心是点 $(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c})$；

⑤两渐近线：直线 $x=-\dfrac{d}{c}$ 和直线 $y=\dfrac{a}{c}$；

【注意】：两条渐近线分别由分母为零和分子、分母中 x 的系数确定.

⑥平移变换：$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad\neq bc)$ 可由反比例函数 $y=\dfrac{\frac{b}{c}}{x}(k\neq 0)$ 图像经过平移得到；

⑦反函数为 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$；

【说明】：分式函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad\neq bc)$ **与反比例函数** $y=\dfrac{c}{x}(c\neq 0)$，**离**

心率均为$\sqrt{2}$，同源于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

3.三次函数图像与性质初步

*1.定义：形如$y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$的函数叫做三次函数. 定义域为R,值域为R.

*2.解析式：①一般式：$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$；

②零点式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(a\neq0)$

*3.单调性：

【探究】：要尝试研究一个陌生函数的一些性质，以往在研究二次函数问题时，我们需要考虑的因素：①开口方向；②对称轴；③端点值；④与坐标轴交点；⑤判别式；⑥两根符号.在研究三角函数问题时，又采用过“五点”作图法.

那三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$的图像及性质，要从那里入手呢？

再结合探究工具“导数”，我们不妨从函数图像几何特征角度，如零点、极值点、拐点、凹凸性、极值点区间等，确定研究的方向，把握三次函数的一些粗浅性质.

$y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$

所以，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，导函数对称轴$x=-\frac{b}{3a}$.

【注意】：拐点横坐标所在处，也有可能是驻点所在处.

$\Delta=4b^2-12ac$（“极值判别式”，当判别式小于等于零时，无极值点）

（一）若$\Delta=4b^2-12ac>0$

令$f'(x)=0$，由根与系数关系知：$x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}$，$x_1x_2=\frac{c}{3a}$

两极值点：$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a},x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$

（1）当$a>0$，$b>0$，$c>0$，约定$d>0$，则拐点在y轴左边，极值点分布在y轴左边.根据零点的个数，尝试做出如下图像：

（2）当$a>0$，$b>0$，$c<0$时，拐点在y轴左边，极值点分布在y轴两边，且左极值点绝对值大于右极值点绝对值；

（3）当$a>0$，$b<0$，$c>0$时，拐点在y轴右边，极值点分布在y轴右边，且左极值点绝对值大于右极值点绝对值.图略

（4）当$a>0$，$b<0$，$c<0$时，拐点在y轴右边，极值点分布在y轴两边，且左极值点绝对值小于右极值点绝对值.图略

（二）若$\Delta=4b^2-12ac<0$

由$\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{(x_1+x_2)-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{4b^2-12ac}{9a^2}}$知：无极值点，拐点横坐标仍为$-\dfrac{b}{3a}$，所以图像如右图所示.

（三）若$\Delta=0$　即$b^2-3ac=0$时，$f'(x)\geq 0$在 R 上恒成立，　即$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$为增函数.

x	$(-\infty,\ \dfrac{-b}{3a})$	$\dfrac{-b}{3a}$	$(\dfrac{-b}{3a},\ +\infty)$

$f'(x)$ 的符号	+	0	+
$f(x)$ 的单调性	↗		↗

***4.极值：**

函数在某点取得极值的充要条件是什么？等价表述，和单调性的联系

(1)若 $b^2-3ac\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 R 上无极值；

(2) 若 $b^2-3ac>0$，则 $f(x)$ 在 R 上有两个极值；且 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值，在 $x=x_2$ 处取得极小值.

***5.零点个数**(根的性质)

函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a>0)$ 的图像与 x 轴有几个交点？和函数的哪些性质相联系？

（联系函数的极值，进行等价转化）

一个交点：极大值小于 0，或者是极小值大于 0.也可以表述为“极大值与极小值同号”；

两个交点：极大值等于零，或者极小值等于零；

三个交点：极大值大于零，极小值小于零.

D2.几个重要图像

1. $y=|ax-b|$（$a>b>0$）

2. $y=a|x|-b$（$a>b>0$）

3. $y=|x-a|+|x-b|$（$a>b>0$）

4. $y=|x-a|-|x-b|$（$a>b>0$）

5.$|x-a|+|y-b|=m$ 6.$|x-a|-|y-b|=m$

D3.函数 $y=F(x)=f(x)-g(x)$ 的零点处理：

（1） $y=F(x)$ 的零点（不是点而是数）$\Leftrightarrow$ $F(x)=0$ 的根

$\Leftrightarrow$ $y=F(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标

$\Leftrightarrow$ $y=f(x), y=g(x)$ 的交点问题.

（2）注意讨论周期函数（特别是三角函数）在某区间内零点个数问题.

（3）零点存在定理： $y=f(x)$ 单调且端点值异号 � $\exists x_0$ �(x_1,x_2) 使 $f(x_0)=0$.

【说明】：

1.方程 $f(x)=0$ 在 (k_1,k_2) 上有且只有一个实根，与 $f(k_1)f(k_2)<0$ 不等价，前者是后者的一个必要而不是充分条件.

特别地，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有且只有一个实根在 (k_1,k_2) 内，等价于 $f(k_1)f(k_2)<0$，或 $f(k_1)=0$ 且 $k_1<-\dfrac{b}{2a}<\dfrac{k_1+k_2}{2}$，或 $f(k_2)=0$ 且 $\dfrac{k_1+k_2}{2}<-\dfrac{b}{2a}<k_2$.

2.$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有一个零点（奇数个零点），可能有无数个零点. $f(a)f(b)>0$， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可能无零点也可能有无数个零点.

3.两个相同的根只能算一个零点，零点的表示方法不能用有序实数对 $(x,0)$.

D4.比例的几个性质

①比例基本性质：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$；

②反比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$；　　　③更比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$；

④合比定理；$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$；　⑤分比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$；

⑥合分比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$；⑦分合比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{c-d}{c+d}$；

⑧等比定理：若$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$，$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n\neq 0$，则

$\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}=\dfrac{a_1}{b_1}$.

D5.（1）三角形中的 “三线定理”（斯德瓦定理）

在△ABC中，D是BC上任意一点，则$AD^2=\dfrac{AC^2BD+AB^2BC}{BC}-BD\cdot DC$.

①若AD是BC上的中线，$m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$；

②若AD是$\angle A$的平分线，$t_a=\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bc\cdot p(p-a)}$，其中$p$为半周长；

③若AD是BC上的高，$h_a=\dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中$p$为半周长.

（2）三角形“五心”的向量性质(P为平面ABC内任意一点)：

①O为ΔABC的重心$\Leftrightarrow\overrightarrow{PO}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$

$\Leftrightarrow OA+OB+OC=0$

②O为ΔABC的垂心$\Leftrightarrow OA\cdot BC=OB\cdot CA=OC\cdot AB=0$

$\Leftrightarrow OA\cdot OB=OB\cdot OC=OC\cdot OA$

$\Leftrightarrow OA^2+BC^2=OB^2+CA^2=OC^2+AB^2$；

③O为ΔABC的内心$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}-\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|AC|})=\overrightarrow{OB}\cdot(\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|BA|}-\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|BC|})=\overrightarrow{OC}\cdot(\dfrac{\overrightarrow{CA}}{|CA|}-\dfrac{\overrightarrow{CB}}{|CB|})$

$\Leftrightarrow(|AB|+|BC+|CA|)PO=|BC|PA+|CA|PB+|AB|PC=0$

④O为ΔABC的外心$\Leftrightarrow(OA+OB)\cdot AB=(OB+OC)\cdot BC=(OC+OA)\cdot CA=0$

$\Leftrightarrow OA\cdot AB=OB\cdot BA, OB\cdot BC=OC\cdot CB, OC\cdot CA=OA\cdot AC$

$\Leftrightarrow OA^2 = OB^2 = OC^2$；

⑤O 为 ΔABC 中 $\angle A$ 的旁心 $\Leftrightarrow |BC| OA = |AC| OB + |AB| OC$；

D6.含绝对值不等式

(1)复数集内的三角形不等式：

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

其中左边在复数 z_1、z_2 对应的向量共线且反向（同向）时取等号，右边在复数 z_1、z_2 对应的向量共线且同向（反向）时取等号.

(2)向量不等式：

$$||a| - |b|| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$$

【注意】：$a、b$ 同向或有 $0 \Leftrightarrow |a+b| = |a| + |b| \ge ||a| - |b|| = |a-b|$；

$a、b$ 反向或有 $0 \Leftrightarrow |a-b| = |a| + |b| \ge ||a| - |b|| = |a+b|$；

$a、b$ 不共线 $\Leftrightarrow ||a| - |b|| < |a \pm b| < |a| + |b|$.(这些和实数集中类似)

(3)代数不等式：

a,b 同号或有 $0 \Leftrightarrow |a+b| = |a| + |b| \ge ||a| - |b|| = |a-b|$；

a,b 异号或有 $0 \Leftrightarrow |a-b| = |a| + |b| \ge ||a| - |b|| = |a+b|$.

D7.重要不等式

1、和积不等式：$a,b \in R \Rightarrow a^2 + b^2 \ge 2ab$（当且仅当 $a = b$ 时取到“=”）.

【变形】：① $ab \le (\frac{a+b}{2})^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$（当 $a = b$ 时，$(\frac{a+b}{2})^2 = \frac{a^2+b^2}{2} = ab$）

【注意】：$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} (a,b \in R^+)$，$ab \le (\frac{a+b}{2})^2 (a,b \in R)$

② $3(a^2 + b^2 + c^2) \ge (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$（当且仅当 $a = b = c$ 时取“=”号）.

2、均值不等式：

两个正数 a、b 的调和平均数、几何平均数、算术平均数、均方根之间的关系，即“平方平均≥算术平均≥几何平均≥调和平均”

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$（当且仅当 $a = b$ 时取“=”）

【拓展】：

① 幂平均不等式：

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}(a_1+a_2+\dots+a_n)^2 \ (a,b,c\in R, a=b=c\text{时取等})$$

② “算术平均≥几何平均（a_1、a_2…a_n为正数）”：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \quad （a_1=a_2=\dots=a_n\text{时取等}）$$

3、含立方的几个重要不等式（a、b、c为正数）：

① $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$

② $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

∴ $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$（$a+b+c>0$等式即可成立，$a=b=c$或$a+b+c=0$时取等）；

$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$ ⇒ $abc \leqslant (\frac{a+b+c}{3})^3 \leqslant \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$

4、柯西不等式：

①（代数形式）设a,b,c,d均为实数，则

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$，其中等号当且仅当$ad=bc$时成立.

②（向量形式）设α，β为平面上的两个向量，则$|\alpha|\cdot|\beta| \geqslant |\alpha\cdot\beta|$，其中等号当且仅当两个向量方向相同或相反（即两个向量共线）时成立.

③（三角形式）设x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3为任意实数，则：

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} \geqslant \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$$

【思考】：三角形不等式中等号成立的条件是什么？

④（推广形式）设$a_i,b_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

等号成立当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时成立.（约定$a_i=0$时，$b_i=0$）

5、绝对值不等式：$|a_1+a_2+a_3| \leqslant |a_1|+|a_2|+|a_3|$

$$|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b| \ (ab\leqslant 0\text{时,取等})$$

双向不等式：$||a|-|b|| \leqslant |a\pm b| \leqslant |a|+|b|$

（左边当 $ab\leqslant 0(\geqslant 0)$ 时取得等号，右边当 $ab\geqslant 0(\leqslant 0)$ 时取得等号.）

6、放缩不等式：

①$a>b>0,\ a>m>0$，则 $\dfrac{b-m}{a-m}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$.

【说明】：$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$（$a>b>0,m>0$，糖水的浓度问题）.

【拓展】：$a>b>0,\ m>0,\ n>0$，则 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}<1<\dfrac{a+n}{b+n}<\dfrac{a}{b}$.

②$a,b,c\in R^{+}$，$\dfrac{b}{a}<\dfrac{d}{c}$，则 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+d}{a+c}<\dfrac{d}{c}$；

③$n\in N_{+}$，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$；

④$n\in N_{+},n>1$，$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n^{2}}<\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$.

⑤$\ln x\leqslant 1-x\ (x>0),e^{x}\geqslant x+1\ (x\in R)$.

二、解答题

做题提醒：获得高分不仅需要采取多夺分策略，还须谨记坚持少丢分策略

第十五题（三角基础题）——*基础题你答对了吗？*

15.1、正弦定理

1.知识工具：

在△ABC 中，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$2R$ 是 ΔABC 外接圆直径）.

【变式】：①$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；

②$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$；

③$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$。

④$\sin A=\dfrac{a}{2R},\sin B=\dfrac{b}{2R},\sin C=\dfrac{c}{2R}$

在这个式子当中，已知两边和一角或已知两角和一边，可以求出其它所有的边和角.

【注明】：正弦定理的作用是进行三角形中的边角互化，在变形中，注意三角形中其他条件的应用：

(1)三角形内角和定理：$A+B+C=\pi$

(2)两边之和大于第三边，两边之差小于第三边

(3)面积公式：$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

(4)三角函数的恒等变形

$\sin(A+B)=\sin C$，　　$\sin(A+B)=-\cos C$，　　$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$，

$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

2.三种题型

① 利用正弦定理公式原型解三角形

② 利用正弦定理公式的变形(边角互化)解三角形：关于边或角的齐次式可以直接边角互化.

③ 三角形解的个数**的判定**：

方法一：画图观察

已知a,b,A，其中$h=bsinA$，

⑴ A为锐角时：

①$a<h$时，无解；

②$a=h$时，一解（直角）；

③$h<a<b$时，两解（一锐角，一钝角）；

④$a\geqslant b$时，一解（一锐角）.

⑵ A为直角或钝角时：

①$a\leqslant b$时，无解；

②$a>b$时，一解（锐角）.

方法二：通过正弦定理解三角形，利用三角形内角和与三边的不等关系检验解出的结果是否符合实际意义，从而确定解的个数.

15.2、余弦定理

1.知识工具：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$等三个；$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$等三个。

【注明】：余弦定理的作用是进行三角形中的边角互化，当题中含有二次项时，常使用余弦定理.在变形中，注意三角形中其他条件的应用.

2.三种题型

① 利用余弦定理公式的原型解三角形.

② 利用余弦定理公式的变形(边角互换)解三角形：

凡在同一式子中既有角又有边的题，要将所有角转化成边或所有边转化成角，在转化过程中需要构造公式形式.

③ 判断三角形的形状.

根据余弦定理，当$a^2+b^2<c^2$，$b^2+c^2<a^2$，$c^2+a^2<b^2$中有一个关系式成立时，该三角形为钝角三角形，而当$a^2+b^2>c^2$，$b^2+c^2>a^2$，$c^2+a^2>b^2$中有一种关系式成立时，并不能得出该三角形为锐角三角形的结论.

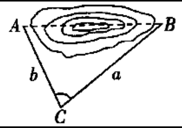
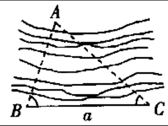
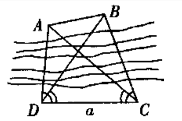
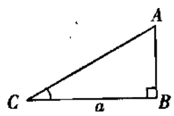
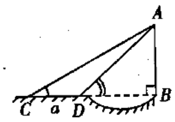
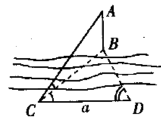
判断三角形形状的方法：

(1)将已知式所有的边和角转化为边边关系，通过因式分解、配方等得出边的相应关系，从而判断三角形的形状.

(2)将已知式所有的边和角转化为内角三角函数间的关系，通过三角恒等变形，得出内角的关系，从而判断出三角形的形状，这时要注意使用 $A+B+C=\pi$ 这个结论.

在两种解法的等式变形中，一般两边不要约去公因式，应移项提取出公因式，以免漏解.

15.3、正余弦定理实际应用

<table>
<tr><td>求距离</td><td>两点间不可通又不可视</td><td>两点间可视但不可达</td><td>两点都不可达</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>求高度</td><td>底部可达</td><td colspan="2">底部不可达</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

① 计算高度；

② 计算距离；

③ 计算角度；

④ 测量方案的设计

实际应用题型的本质就是解三角形，无论是什么样的现象，都要首先画出三角形的模型，再通过正弦定理和余弦定理进行求解.

15.3、常见结论

1.**①三角学中的射影公式**：在 ΔABC 中，$a=b\cos C+c\cos B\ldots\ldots$.

②三角学中的射影定理：在 $Rt\Delta ABC$ 中，$|AC|^2=|AD|\cdot|AB|$；$|CD|^2=|AD|\cdot|DB|$.

【思考】“**射影定理**”、“**勾股定理**”关系.

2.**正切定理**：$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\tan\dfrac{A+B}{2}}{\tan\dfrac{A-B}{2}}$.

3.三角形面积公式

①$S_\Delta=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$（$h_a$、$h_b$、$h_c$分别表示 a、b、c 上的高）；

②$S_\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$；

③$S_\Delta=\dfrac{abc}{4R}$；　④$S_\Delta=2R^2\sin A\sin B\sin C$（$R$ 为外接圆半径）；

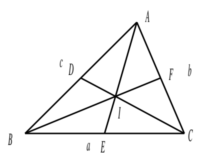
【变形】：$S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\dfrac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)}=\dfrac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$.

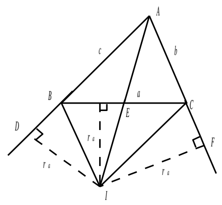
⑤$S_\Delta=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$（$r$ 为内切圆半径）；

【说明】：到三角形三边的距离相等的点有 4 个，一个是内心，其余 3 个是旁心.

如图：图 1 中的 I 为 $S_{\triangle ABC}$ 的内心，$S_{\triangle}=Pr$，图 2 中的 I 为 $S_{\triangle ABC}$ 的一个旁心，

$S_{\triangle}=1/2(b+c-a)r_a$





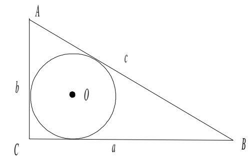


图 1　　图 2　　图 3

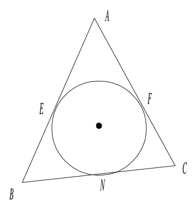


图 4

附：三角形的五个“心”：

重心：三角形三条中线交点.

外心：三角形三边垂直平分线相交于一点.

内心：三角形三内角的平分线相交于一点.

垂心：三角形三边上的高相交于一点.

旁心：三角形一内角的平分线与另两条内角的外角平分线相交一点.

（5）已知⊙O 是△ABC 的内切圆，若 BC=a，AC=b，AB=c [注：s 为△ABC 的半周长,

特例：已知在 Rt△ABC，c 为斜边，则内切圆半径 r=$\frac{a+b-c}{2}=\frac{ab}{a+b+c}$（如图 3）.

⑥$S_{\triangle}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ $\left(\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1),\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)\right)$；

⑦$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ （可由(2)向量的数量积公式可得）；

⑧$S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（其中 $P=\frac{a+b+c}{2}$）.

第十六题（立几基础题）——*推证不漏一个条件*

16.2、求解空间角、距离和体积

(一)求角：　（步骤------Ⅰ.找或作平面角；Ⅱ.求角）

⑴ 异面直线所成角的求法：

① 平移法：平移直线，构造三角形；

② 补形法：补成正方体、平行六面体、长方体等，发现两条异面直线间的关系.

(理科还可用向量法，转化为两直线方向向量的夹角.)

⑵ 直线与平面所成的角：

① 直接法（利用线面角定义）；

② 先求斜线上的点到平面距离 h，与斜线段长度作比，得 $\sin\theta$.

（理科还可用向量法，转化为直线的方向向量与平面法向量的夹角.）

⑶ 二面角的求法：

① 定义法：在二面角的棱上取一点（特殊点），作出平面角，再求解；

② 三垂线法：由一个半面内一点作（或找）到另一个半平面的垂线，用三垂线定理或逆定理作出二面角的平面角，再求解；

③ 射影法：利用面积射影公式：$S' = S\cos\theta$,其中θ为平面角的大小；

【注】：对于没有给出棱的二面角，应先作出棱，然后再选用上述方法；

（理科还可用向量法，转化为两个班平面法向量的夹角.）

（二）求距离：（步骤------Ⅰ.找或作垂线段；Ⅱ.求距离）

⑴ 两异面直线间的距离：一般先作出公垂线段，再进行计算；

⑵ 点到直线的距离：一般用三垂线定理作出垂线段，再求解；

⑶ 点到平面的距离：

① 垂面法：借助面面垂直的性质作垂线段（确定已知面的垂面是关键），再求解；

② 等体积法；**（理科还可用向量法：**$d = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$**.）**

⑷ 球面距离（步骤）：①求线段AB的长；②求球心角$\angle AOB$的弧度数；③求劣弧AB的长.

（三）求体积

常规方法：直接法（公式法）、分割法、补形法、等积法(位置转换)、比例法(性质转换)等.

16.3、重要定理

（1）**面积射影定理：**$S = \dfrac{S'}{\cos\theta}$**(平面多边形及其射影的面积分别是**$S$**和**$S'$**,它们所在平面所成锐二面角的为**$\theta$**).**

（5）**三垂线定理**：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.

逆定理：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和

这条斜线在平面内的射影垂直.

【提炼】：（1）$\cos\angle PAB=\cos\angle PAC\cdot\cos\angle CAB$

（2）$\angle PAC$ 相当于斜线与平面所成角

（3）$\angle PBC$ 相当于二面角

（4）$l\perp AC, l\subset 平面ABC \quad l\perp AP$（定理）

（5）$l\perp AP, l\subset 平面ABC \quad l\perp AC$（逆定理）

（6）垂线段最短（前提是在平面外由同一点引的所有线段）

（7）最小角定理（涉及到不等问题时要想到这里）

第 17 题（解几综合题）——*从平几中寻突破到解几中找关系*

17.1、圆锥曲线中的精要结论：

2.弦长公式：$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2-x_1|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot|y_2-y_1|=\sqrt{(1+\frac{1}{k^2})\cdot[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]};$$

【注】：(1)焦点弦长：i．椭圆：$|AB|=2a\pm e(x_1+x_2)$；

ii．抛物线：$|AB|=x_1+x_2+p=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$；

(2)通径（最短弦）：i．椭圆、双曲线：$\dfrac{2b^2}{a}$；

ii．抛物线：$2p$.

3.过两点的椭圆、双曲线标准方程可设为：$mx^2+ny^2=1$ （m,n 同时大于 0 时表示椭圆，$mn<0$ 时表示双曲线）；

4.椭圆中的结论：

(1)内接矩形最大面积：$2ab$；

(2)P，Q 为椭圆上任意两点，且 $OP\perp OQ$，则 $\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$；

(3)椭圆焦点三角形：

i. $S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$，（$\theta=\angle F_1PF_2$）；

ii. 点 M 是 ΔPF_1F_2 内心，PM 交 F_1F_2 于点 N，则 $\dfrac{|PM|}{|MN|}=\dfrac{a}{c}$；

(4)当点 P 与椭圆短轴顶点重合时 $\angle F_1PF_2$ 最大；

5.双曲线中的结论：

(1)双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的渐近线：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$；

(2)共渐进线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 的双曲线标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda$($\lambda$ 为参数，$\lambda\neq0$）；

(3)双曲线焦点三角形：

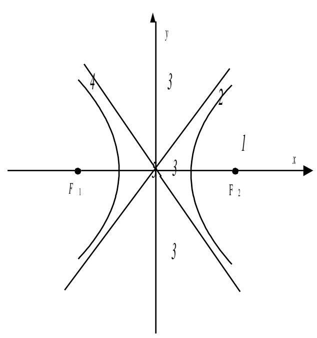
i. $S_{\Delta PF_1F_2}=b^2\cot\dfrac{\theta}{2}$，（$\theta=\angle F_1PF_2$）；

ii. P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$($a>0$，$b>0$)的左（右）支上一点，$F_1$、$F_2$ 分别为左、右焦点，则△PF_1F_2 的内切圆的圆心横坐标为 $-a,(a)$；

(4)等轴双曲线：双曲线 $x^2-y^2=\pm a^2$ 称为等轴双曲线，其渐近线方程为 $y=\pm x$ (渐近线互相垂直)，离心率 $e=\sqrt{2}$.

(5)共渐近线的双曲线系方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$ 的渐近线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ 如果双曲线的渐近线为 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$ 时，它的双曲线方程可设为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$.

(6) 共轭双曲线：以已知双曲线的虚轴为实轴，实轴为虚轴的双曲线，叫做已知双曲线的共轭双曲线．$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda$ 与 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-\lambda$ 互为共轭双曲线，它们具有共同的渐近线：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$.



(7) 若 P 在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则常用结论 1：P 到焦点的距离为 m = n，则 P 到两准线的距离比为 $m∶n$.

简证：$\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{\frac{|PF_1|}{e}}{\frac{|PF_2|}{e}}=\dfrac{m}{n}$.

常用结论 2：从双曲线一个焦点到另一条渐近线的距离等于 b.

(8) 直线与双曲线的位置关系：

区域①：无切线，2 条与渐近线平行的直线，合计 2 条；

区域②：即定点在双曲线上，1 条切线，2 条与渐近线平行的直线，合计 3 条；

区域③：2 条切线，2 条与渐近线平行的直线，合计 4 条；

区域④：即定点在渐近线上且非原点，1 条切线，1 条与渐近线平行的直线，合计 2 条；

区域⑤：即过原点，无切线，无与渐近线平行的直线.

小结：过定点作直线与双曲线有且仅有一个交点，可以作出的直线数目可能有 0、2、3、4 条.

若直线与双曲线一支有交点，交点为二个时，求确定直线的斜率可用代入“Δ”法与渐近线求交和两根之和与两根之积同号.

6.抛物线中的结论：

(1)抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点弦 AB 性质：

i. $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$； $y_1y_2=-p^2$；

ii. $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$ ；

iii. 以 AB 为直径的圆与准线相切；

iv. 以 AF （或 BF ）为直径的圆与 y 轴相切；

v. $S_{\Delta AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$.

(2)抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）内结直角三角形 OAB 的性质：

i. $x_1x_2=4P^2, y_1y_2=-4P^2$；

ii. l_{AB} 恒过定点 $(2p,0)$；

iii. A,B 中点轨迹方程： $y^2=p(x-2p)$；

iv. $OM\perp AB$，则 M 轨迹方程为：$(x-p)^2+y^2=p^2$；

v. $(S_{\Delta AOB})_{\min}=4p^2$.

(3)抛物线 $y^2=2px$（$p>0$），对称轴上一定点 $A(a,0)$，则：

i. 当 $0<a\leqslant p$ 时，顶点到点 A 距离最小，最小值为 a；

ii. 当 $a>p$ 时，抛物线上有关于 x 轴对称的两点到点 A 距离最小，最小值为 $2ap-p^2$.

17.2、两个常见的曲线系方程

(1)过曲线 $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ 的交点的曲线系方程是 $f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$ (λ 为参数).

(2)共焦点的有心圆锥曲线系方程 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=1$,其中 $k<\max\{a^2,b^2\}$.

当 $k<\min\{a^2,b^2\}$ 时,表示椭圆；当 $\min\{a^2,b^2\}<k<\max\{a^2,b^2\}$ 时,表示双曲线.

17.3、圆

5、圆的切线方程及切线长公式

(1)已知圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

①若已知切点 (x_0,y_0) 在圆上，则切线只有一条，其方程是

$$x_0x+y_0y+\frac{D(x_0+x)}{2}+\frac{E(y_0+y)}{2}+F=0.$$

当 (x_0,y_0) 圆外时，$x_0x+y_0y+\frac{D(x_0+x)}{2}+\frac{E(y_0+y)}{2}+F=0$ 表示过两个切点的切点弦方程．求切点弦方程，还可以通过连心线为直径的圆与原圆的公共弦确定.

②过圆外一点的切线方程可设为 $y-y_0=k(x-x_0)$，再利用相切条件求 k，这时必有两条切线，注意不要漏掉平行于 y 轴的切线.

③斜率为 k 的切线方程可设为 $y=kx+b$，再利用相切条件求 b，必有两条切线.

(2)已知圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的切线方程.

①若 P(x_0,y_0)是圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上的点，则过点 P(x_0,y_0)的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.特别地，若 $a=0;b=0$，切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；

若 P(x_0,y_0)是圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 外一点，由 P(x_0,y_0)向圆引两条切线，切点分别为 A，B 则直线 AB 的方程为

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.特别地，若 $a=0;b=0$，

$xx_0+yy_0=r^2$

②圆 $x^2+y^2=r^2$，斜率为 k 的圆的切线方程为 $y=kx\pm r\sqrt{1+k^2}$.

(3) 过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 外一点 (x_0,y_0) 的切线长为

$l=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F}$.

17.4、解析几何与向量综合时可能出现的向量内容：

（1）给出直线的方向向量 $u=(1,k)$ 或 $u=(m,n)$；

（2）给出 $OA+OB$ 与 AB 相交，等于已知 $OA+OB$ 过 AB 的中点；

在 ΔABC 中，给出 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，则 AD 是 ΔABC 中 BC 边的中线；

（3）给出 $PM+PN=0$，等于已知 P 是 MN 的中点；

（4）给出 $AP+AQ=\lambda\left(BP+BQ\right)$，等于已知 A,B 与 PQ 的中点三点共线；

（5）给出以下情形之一：① $AB\parallel AC$；②存在实数 λ, 使 $\overline{A}B=\lambda\overline{A}C$；

③若存在实数 α,β, 且 $\alpha+\beta=1$,，使 $OC=\alpha OA+\beta OB$ 等于已知 A,B,C 三点共线.

（6）给出 $\overrightarrow{OP}=\frac{OA+\lambda OB}{1+\lambda}$，等于已知 P 是 AB 的定比分点，λ 为定比，即 $AP=\lambda PB$

（7）给出 $MA\cdot MB=0$，等于已知 $MA\perp MB$，即 $\angle AMB$ 是直角，给出 $MA\cdot MB=m<0$，

等于已知 $\angle AMB$ 是钝角，给出 $MA\cdot MB=m>0$，等于已知 $\angle AMB$ 是锐角；

（8）给出 $\lambda(\frac{\overrightarrow{MA}}{\left|MA\right|}+\frac{\overrightarrow{MB}}{\left|MB\right|})=\overrightarrow{MP}$，等于已知 MP 是 $\angle AMB$ 的平分线；

（9）在平行四边形 $ABCD$ 中，给出 $(AB+AD)\cdot(AB-AD)=0$，等于已知 $ABCD$ 是菱形；

（10）在平行四边形 $ABCD$ 中，给出 $|AB+AD|=|AB-AD|$，等于已知 $ABCD$ 是矩形；

（11）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\left|x_Ay_B-x_By_A\right|$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$；

（12）O 为 ΔABC 内一点，则 $S_{\Delta BOC}OA+S_{\Delta AOC}OB+S_{\Delta AOB}OC=0$；

（13）在 ΔABC 中，给出 $OP=OA+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|})$ $(\lambda\in R^+)$，则 $\overrightarrow{AP}$ 通过 ΔABC 的内心；

17.5、解题规律盘点

1、点

(1)交点

① 直线与圆锥曲线交于不同的两点：直线与二次曲线联立，当二次项系数不为 0 时，

$\begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2=\cdots\\x_1\cdot x_2=\cdots\end{cases}$，$x=my+b$ 与二次曲线联立，$\begin{cases}\Delta>0\\y_1+y_2=\cdots\\y_1\cdot y_2=\cdots\end{cases}$；

② 直线与圆锥曲线相切：直线与二次曲线联立，$\begin{cases}\text{二次项系数不等于0}\\\Delta=0\end{cases}$

③ 直线与二次曲线有一个公共点：

$\begin{cases}\text{直线}l\\\text{双曲线}\end{cases}\Rightarrow$ 二次项系数为 0，表示平行于渐近线的两条直线；二次项系数为 0，△=0

$\begin{cases}\text{直线}l\\\text{抛物线}\end{cases}\Rightarrow$ 二次项系数为 0，表示平行于对称轴的一条直线；二次曲线不为 0，△=0

(2)定点处理思路；

(3)① 设参数方程；椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的参数方程是：

$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数）；

圆 $(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$ 的参数方程：$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数）

② 抛物线 $y^2=2px(p\neq0)$ 上的动点可设为：$P(\dfrac{y_0^2}{2p},y_0)$ 或 $P(2pt^2,2pt)$ 或 $P(x_0,y_0)$，其中 $y_0^2=2px_0$，以简化计算.

2、直线

(1)设直线方程分斜率 k 存在、k 不存在两种情况讨论。如果什么信息也没有：讨论斜率不存在情形，当斜率存在时，往往设为斜截式：$y=kx+b$；

巧设直线方程 $x-x_0=k(y-y_0)$ 回避讨论及运算等问题

当直线过定点 (x_0,y_0) 时，若设成 $y-y_0=k(x-x_0)$ 有时会出现下列情况：

(i)容易忽视斜率不存在的情形；(ii)运算较繁，有时还会陷入僵局.

(2)过 x 轴上一点 $(m,0)$ 的直线一般设为 $x=ty+m$ 可以避免对斜率是否存在的讨论

(3)直线的方向向量$(m,\lambda)\Rightarrow \begin{cases} m=0,(0,\lambda),斜率不存在 \\ m\neq 0,(1,\dfrac{\lambda}{m}),斜率\dfrac{\lambda}{m} \end{cases}$

(4)两解问题：

3、角

(1)余弦定理;

(2)到角公式:

(3)向量的夹角公式

4、直线与圆锥曲线

(1)**直线与圆锥曲线问题解法：**

1.直接法（通法）：联立直线与圆锥曲线方程，构造一元二次方程求解.

【运算规律】：直线与圆锥曲线位置关系运算程式

(1)已知曲线$\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$Ax^2+By^2=1$）与直线$y=kx+m$方程联立得：

$$(b^2\pm k^2a^2)x^2-2mka^2x\pm a^2m^2-a^2b^2=0$$

$$((A+Ba^2)x^2-2Bmkx+Bm^2-1=0)$$

【注意】：当曲线为双曲线时，要对$(b^2-k^2a^2)$与0进行比较.

$$\Delta=(-2mka^2)^2-4(b^2+k^2a^2)(a^2m^2-a^2b^2)=4a^2b^4-4b^2a^2m^2+4a^4b^2$$

由根与系数关系知：$x_1+x_2=\dfrac{2mka^2}{b^2+k^2a^2};x_1x_2=\dfrac{a^2m^2-a^2b^2}{b^2+k^2a^2}$

【后话】:联立直线与圆锥曲线方程，构造一元二次方程求解时，注意以下问题：①联立的关于“x”还是关于“y”的一元二次方程？②二次项系数系数为0的情况讨论了吗？③直线斜率不存在时考虑了吗？④判别式验证了吗？

2.设而不求（代点相减法）——处理弦中点与直线斜率问题

步骤如下：

已知曲线 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，①设点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 中点为 $M(x_0,y_0)$，

②作差得 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\cdots\cdots$；$k_{\text{AB}}k_{\text{OM}}=\mp\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$；对抛物线 $y^2=2px(p\neq 0)$ 有

$k_{\text{AB}}=\frac{2p}{y_1+y_2}=\frac{p}{y_0}$.

【细节盘点】

***1.用直线和圆锥曲线方程消元得二次方程后，注意用判别式、韦达定理、弦长公式；注意对参数分类讨论和数形结合、设而不求思想的运用；注意焦点弦可用焦半径公式，其它用弦长公式.**

***2.在直线与圆锥曲线的位置关系问题中，常与“弦”相关，“平行弦”问题的关键是“斜率”、“中点弦”问题关键是“韦达定理”或“小小直角三角形”或“点差法”、“长度(弦长)”问题关键是长度(弦长)公式或“小小直角三角形”.**

***3. 在直线与圆锥曲线的位置关系问题中，涉及到“交点”时，转化为函数有解问题；先验证因所设直线斜率存在，造成交点漏解情况，接着联立方程组，然后考虑消元建立关于 x 的方程还是 y 的方程，接着讨论方程二次项系数为零的情况，再对二次方程判别式进行分析，即 $\Delta=0$ 时，直线与曲线相切，……**

***4.求解直线与圆锥曲线的“弦长”、“交点”问题时，必要条件（注意判别式失控情况）是他们构成的方程组有实数解，当出现一元二次方程时，务必先有“$\Delta\geqslant 0$”. 求解直线与圆锥曲线的其它问题时，如涉及到二次方程问题，必须优先考虑“二次项系数”与“判别式”问题.**

***5.解决直线与圆的关系问题时，要充分发挥圆的平面几何性质的作用(如半径、半弦长、弦心距构成直角三角形，切线长定理、割线定理、弦切角定理等等).**

***6.韦达定理在解几中的应用：①求弦长； ②判定曲线交点的个数； ③求弦中点坐标；④求曲线的方程.**

(2)直线与圆锥曲线相交的弦长公式：

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

或 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_2+x_1)^2-4x_2\cdot x_1]}=|x_1-x_2|\sqrt{1+\tan^2\alpha}$

$$=|y_1-y_2|\sqrt{1+\cot^2\alpha}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$|AB|=\sqrt{(1+\frac{1}{k^2})(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

【注】：弦端点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由方程 $\begin{cases}y=kx+b\\F(x,y)=0\end{cases}$ 消去 y 得到

$ax^2+bx+c=0$，$\Delta>0$，α 为直线 AB 的倾斜角，k 为直线的斜率，

$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$.

⑶**抛物线的切线方程**

① 抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程是 $y_0y = p(x + x_0)$.

② 过抛物线 $y^2 = 2px$ 外一点 $P(x_0, y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $y_0y = p(x + x_0)$.

③ 抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 相切的条件是 $pB^2 = 2AC$.

5、几何定值、极值问题

几何极值问题实际上就是以几何条件出现的极值问题，通常运用几何中的有关不等式和定理解决，有时运用“对角”变换及局部调整法，有时运用三角方法，如有关三角函数性质、正弦定理、三角形面积公式等转化为三角极值问题解决.有关面积与周长的极值问题除了运用有关面积的几何知识外，常常需要用如下结论：

① 周长一定的三角形中，以正三角形的面积最大；
② 周长一定的矩形中，以正方形面积最大；
③ 面积一定的三角形中，以正三角形的周长最小；
④ 周长一定的平面曲线中，圆所围成的面积最大；
⑤ 在面积一定的闭曲线中，圆的周长最小；
⑥ 在边长分别相等的多边形中，以圆内接多边形的面积最大；
⑦ 在等周长的边形中，以圆内接多边形的面积最大；
⑧ 在面积一定的边形中，正边形的周长最小.

几何定值问题主要是研究和解决变动的图形中某些几何元素的几何量保持不变，或几何元素的北欧谐几何性质或位置保持不变等问题.

常见的几何定值中的定量问题为定角、定长（线段长、周长、距离之和等）、定比（线段比、面积比）、定积（面积、线段积）等.

常见的几何定值中的定位问题为过定点、过定直线等.

几何定值问题可以分为两类：一类是绝对的定值问题，即需要证明的定值为一确定的常数.这种定值为所给图形的位置、大小、形状无关；另一类是相对定值问题，即要证明的定值与题设图形中的某些定量有关，这种定值是随题设图形的位置、大小和形状的变化而改变的，因此，只有相对的意义，也就是证明题推断的几何量可以用题设已知量的某种确定的关系来表示.

解决定值问题常用的处理思路和方法：

（1）利用综合法证明时，需要改变题目的形式，把一般定值题转化为特殊情况，因此，常作辅助图形；其次要明确图形中哪些元素是固定元素，哪些量是定量，分析问题时要围绕着固定元素和定量进行，把定值固定在已知量上；

（2）利用参数法证明时，要根据题设的条件，选取适当的参数，然后将所要证明的定值用参数表示出来，最后消去参数，便求得用常量表示的定值；

（3）利用计算法证明时，通常借助于正、余弦定理或坐标法将有关量用某些特定的量表示出来，再通过计算证明所求的式子的值为定值；

（4）综合运用几何、代数、三角知识证题.

6、求轨迹方程的常用方法：

⑴ 直接法：直接通过建立 x、y 之间的关系，构成 $F(x, y) = 0$，是求轨迹的最基本的方法.

⑵ 待定系数法：可先根据条件设所求曲线的方程，再由条件确定其待定系数，代回所列

的方程即可.

⑶代入法(相关点法或转移法).

⑷定义法：如果能够确定动点的轨迹满足某已知曲线的定义，则可由曲线的定义直接写出方程.

⑸交轨法(参数法)：当动点 $P(x,y)$ 坐标之间的关系不易直接找到，也没有相关动点可用时，可考虑将 x 、 y 均用一中间变量(参数)表示，得参数方程，再消去参数得普通方程.

7、定义解题

① 椭圆：第一定义：平面上一动点 P 到平面上两个定点 F_1、F_2 的距离和为定值，且$|PF_1|+|PF_2|>|F_1F_2|$,则 P 点轨迹为椭圆。

② 双曲线：$||PF_1|-|PF_2||=$定值$<|F_1F_2|$

③ 三种圆锥曲线的统一定义：$\frac{|PF|}{d}=e$ （e∈(0,1)：椭圆；e=1：抛物线；e>1：双曲线

第 18 题（数列综合题）——*稳步作答，步步为营*

18.1、判定数列是基本数列的方法

（1）判定数列是否是等差数列的方法主要有：定义法、中项法、通项法、和式法、图像法.

（2）解题常用判定数列是等差数列有以下三种方法：

①$a_n - a_{n-1} = d(n \geq 2, d为常数)$

②$2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}(n \geq 2)$

③$a_n = kn + b$ (n,k 为常数).

【思考】：那等比数列呢？

（1）判定数列是否是等比数列的方法主要有：定义法、中项法、通项法、和式法

（2）解题常用判定数列是等比数列有以下四种方法：

①$a_n = a_{n-1}q(n \geq 2, q为常数, 且 \neq 0)$

②$a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$ ($n \geq 2$ ， $a_n a_{n+1} a_{n-1} \neq 0$)

③$a_n = cq^n$ (c,q 为非零常数).

④ 正数列{ a_n }成等比的充要条件是数列{ $\log_x a_n$ }（ $x \neq 1$ ）成等比数列.

18.2、数列求和的常用方法：

（1）**公式法**：①等差数列求和公式. ② 等比数列求和公式.

【特别声明】：运用等比数列求和公式，务必检查其公比与 1 的关系，必要时分类讨论.

（2）**分组求和法**

（3）**倒序相加法**

（4）**错位相减法**

（5）**裂项相消法**：如果数列的通项可“分裂成两项差”的形式，且相邻项分裂后相关联，那么常选用裂项相消法求和.常用裂项形式有：

① $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$； ② $\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$；

③ $(\frac{1}{k^2}<)\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1})$； $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{(k+1)k}(<\frac{1}{k^2}<)\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$；

④ $\frac{1}{n(n-1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$； ⑤ $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$；

⑥ $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$；

⑦ $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$； ⑧ $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m \Rightarrow C_n^m=C_{n+1}^m-C_n^{m-1}$；

⑧ $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{a+b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$； ⑨ $\frac{1}{(An+B)(An+C)}=\frac{1}{C-B}(\frac{1}{An+B}-\frac{1}{An+C})$.

¼ ¼

用例：$a_n=\frac{n+2}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2(n+1)-n}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)2^n}$；

$$a_n=\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

（6）通项转换法

若一阶线性递归数列 $a_n=ka_{n-1}+b(k\neq 0,k\neq 1)$，则总可以将其改写变形成如下形式：$a_n+\frac{b}{k-1}=k(a_{n-1}+\frac{b}{k-1})$（$n\geqslant 2$），于是可依据等比数列的定义求出其通项公式;

18.3、数列通项求解思路：

㈠由非递推关系求通项

⑴ 定义法：根据等差等比数列的等价条件，套用公式.

⑵ 公式法：①已知 S_n（即 $a_1+a_2+\cdots+a_n=f(n)$）求 a_n 用作差法：

$$a_n=\begin{cases}S_1,(n=1)\\ S_n-S_{n-1},(n\geqslant 2)\end{cases}.$$

② 已知 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=f(n)$ 求 a_n 用作商法：$a_n=\begin{cases}f(1),(n=1)\\ \frac{f(n)}{f(n-1)},(n\geqslant 2)\end{cases}$.

㈡由递推式求数列通项

⑴ 由递推式 $a_{n+1}-a_n=f(n)$，求 a_n 用迭加法.

⑵ 由递推式 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$，求 a_n 用迭乘法，还可以用迭代法.

① $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\dfrac{a_2}{a_1}=f(n)\cdot f(n-1)\cdot f(n-2)\cdot\cdots\cdot f(1)$ （迭乘法）

② $a_n=f(n-1)a_{n-1}=f(n-1)f(n-2)a_{n-2}=\ldots$

$$=f(n-1)f(n-2)f(n-3)\ldots f(1)a_1$$ （迭代法）

⑶ 递推式为 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$，可以作如下具体分解，均可用**构造法**求解(先引入可化简辅助数列，再求目标通项).

类型 1 $a_{n+1}=Aa_n+D$ (常数 $A,D\neq 0$)变形为 $a_{n+1}+\dfrac{D}{A-1}=A(a_n+\dfrac{D}{A-1})$

可用解题途径：①转化等差、等比数列；②逐项选代；③消去常数 n 转化为 $a_{n+2}=Pa_{n+1}+qa_n$ 的形式，再用特征根方法求 a_n；④ $a_n=c_1+c_2P^{n-1}$ （公式法），c_1,c_2 由 a_1,a_2 确定.

① 转化等差、等比：$a_{n+1}+x=P(a_n+x)\Rightarrow a_{n+1}=Pa_n+Px-x\Rightarrow x=\dfrac{r}{P-1}$.

② 选代法：$a_n=Pa_{n-1}+r=P(Pa_{n-2}+r)+r=\cdots$

$$\therefore a_n=(a_1+\frac{r}{P-1})P^{n-1}-\frac{r}{P-1}=(a_1+x)P^{n-1}-x$$

$$=P^{n-1}a_1+P^{n-2}r+\cdots+Pr+r.$$

③ 用特征方程求解：$\left.\begin{array}{l}a_{n+1}=Pa_n+r\\ a_n=Pa_{n-1}+r\end{array}\right\}$ 相减，$\Rightarrow a_{n+1}-a_n=Pa_n-Pa_{n-1}\Rightarrow a_{n+1}=(P+1)a_n-Pa_{n-1}$

④ 由选代法推导结果：$c_1=\dfrac{r}{1-P}$，$c_2=a_1+\dfrac{r}{P-1}$，$a_n=c_2P^{n-1}+c_1=(a_1+\dfrac{r}{P-1})P^{n-1}+\dfrac{r}{1-P}$

类型 2 $a_{n+1}=Aa_n+Cn+D$ (常数 $A,C\neq 0$)变形为

$$a_{n+1}+\frac{C}{A-1}(n+1)+\frac{C+(A-1)D}{(A-1)^2}=A[a_n+\frac{C}{A-1}n+\frac{C+(A-1)D}{(A-1)^2}]$$

类型 3 $a_{n+1}=Aa_n+Bt^n+D$ (常数 $A,B,\mathrm{t}\neq 0$，且 $\mathrm{t}\neq 1$)变形为

$$a_{n+1}+\frac{B}{A-\mathrm{t}}t^{n+1}+\frac{D}{A-1}=A(a_n+\frac{B}{A-\mathrm{t}}t^n+\frac{D}{A-1})$$

类型 4 $a_{n+1}=Aa_n+Bt^n+Cn+D$ (常数 $A,B,C,\mathrm{t}\neq 0$，且 $\mathrm{t}\neq 1$)变形为

$$a_{n+1}+\frac{B}{A-t}t^{n+1}+\frac{C}{A-1}(n+1)+\frac{C+(A-1)D}{(A-1)^2}=A[a_n+\frac{B}{A-t}t^n+\frac{C}{A-1}n+\frac{C+(A-1)D}{(A-1)^2}]$$

⑷递推式为S_n与a_n的关系式（或$S_n=f(a_n)$），可利用

$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$进行求解.

⑸递推式为$a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}$($p,q,r\neq 0$)或$a_{n+1}a_n=xa_{n+1}+ya_n$($x,y\neq 0$)，可变形为

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{r}{p}\frac{1}{a_n}+\frac{q}{p}$，或$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{x}{y}\frac{1}{a_n}+\frac{1}{y}$.

⑹对于数列$a_{n+2}=\frac{Aa_n+B}{Ca_n+D}$，$a_1=m,n\in N^*(A,B,C,D$是常数且$C\neq 0,AD-BC\neq 0$

）其特征方程为$x=\frac{Ax+B}{Cx+D}$，变形为$Cx^2+(D-A)x-B=0$(*).

若(*)有二异根α,β，则可令$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=c\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$（其中$c$是待定常数），

代入a_1,a_2的值可求得c值.这样数列$\left\{\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right\}$是首项为$\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}$，公比为$c$的等比

数列，于是这样可求得a_n.

若(*)有二重根$\alpha=\beta$，则可令$\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{1}{a_n-\alpha}+c$（其中$c$是待定常数），

代入a_1,a_2的值可求得c值.这样数列$\left\{\frac{1}{a_n-\alpha}\right\}$是首项为$\frac{1}{a_n-\alpha}$，公差为$c$的等差

数列，于是这样可求得a_n.

⑺递推式为$a_{n+1}=pa_n^m$($p>0,a_1>0$)，可变形为$\lg a_{n+1}=\lg p+m\lg a_n$.

⑻递推式为$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$（其中p,q均为常数），可把原递推公式转化为

$a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)$，其中$s,t$满足$\begin{cases}s+t=p\\ st=-q\end{cases}$，特征方程为$x^2=px+q$(*).

若(*)有二异根α,β，则可令$a_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n$($c_1,c_2$是待定常数）

若(*)有二重根$\alpha=\beta$，则可令$a_n=(c_1+nc_2)\alpha^n$（c_1,c_2是待定常数）

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$（p、q为二阶常数）→ 用特证根方法求解.

具体步骤：

① 写出特征方程$x^2=Px+q$（x^2对应a_{n+2}，x对应a_{n+1}），并设二根x_1,x_2

② 若$x_1\neq x_2$可设$a_{n.}=c_1x_1^n+c_2x_2^n$，若$x_1=x_2$可设$a_n=(c_1+c_2n)x_1^n$；

③ 由初始值a_1,a_2确定c_1,c_2.

㈢双数列型

可根据所给两个数列递推公式的关系，灵活采用**累加**、**累乘**、**化归**等方法求解.

【说明】：一些特殊数列，如①周期数列，不一定能求通项，但由递推关系，可得出周期等有效量，同样也可确定数列中的a_{n+1}与n对应关系；②阶差数列，如二阶等差等比数列等；③还有些数列，只是起到过渡作用，如数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$通过数列$\{f_n\}$建立联系，这时$\{f_n\}$就不一定可求通项，其实也不一定要求出来.

18.4、数列中蕴含的几种数学思想：

1、函数的思想

2、等价转化的思想：

（1）将“非等差、等比数列”转化为“等差数列、等比数列”，如：错位相减

（2）a_n与S_n之间的转化

3、分类讨论的思想：

（1）由s_n求a_n. $a_n=\begin{cases}s_1(n=1)\\S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$

（2）等比数列的求和公式：$S_n=\begin{cases}na_1(q=1)\\\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)\end{cases}$，或$s_n=\begin{cases}na_1(q=1)\\\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1)\end{cases}$

（3）项数n分奇、偶讨论.

4、从特殊到一般的思想（“归纳、猜想”）

从一般到特殊的思想：$n\in N^*$时成立，则n=1,2也应该均成立.如：2004江苏高考第20数列题.

5、解方程组思想：a_n、a_1、s_n、d、n五个变量“知三求二”

6、回归基本量的思想：首项、公差决定等差数列；首项、公比决定等比数列

7、递推的思想：如：已知$s_n=3a_n-1$，求a_n.析：$s_{n-1}=3a_{n-1}-1(n\geq 2)$，两式相

减得：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{3}{2}$,所以$\{a_n\}$为等比数列

再如：求数列通项时的叠加法、叠乘法；求数列前 n 和时，总体指导思想：欲求和，先研究通项（错位相减法、倒序相加法、分组求和法、裂项相消法）.总之，对于数列章节的学习，不光是掌握几个公式，而更要很好地从数学的思想方法.

18.5、攻克数列不等式证明问题的若干策略

策略一：放缩法

数列问题的两大特点是求和与递推，因此要证关于项和或通项的不等式，可先寻找关于通项或相邻两项的不等式，这便是放缩的思想，即先放缩再求和或迭代。

1. 利用最简单的不等式关系进行放缩
2. 利用由条件得到的不等关系进行放缩
3. 利用由基本不等式得到的不等关系进行放缩
4. 利用由倒数（函数单调性）得到的不等关系进行放缩
5. 利用由二项式定理得到的不等关系进行放缩

策略二：利用数列的单调性

1. 由定义确定数列的单调性
2. 构造函数、利用导数确定数列的单调性

策略三：数学归纳法

第 19 题（实际应用题）——*人难我不畏难，人易我不大意*

19.1、解应用题的一般思路可表示如下：

19.2、解应用题的一般程序

（1）读: 阅读理解文字表达的题意，分清条件和结论，理顺数量关系，这一关是基础

（2）建: 将文字语言转化为数学语言，利用数学知识，建立相应的数学模型。 熟悉基本数学模型，正确进行建“模”是关键的一关

（3）解: 求解数学模型，得到数学结论。 一要充分注意数学模型中元素的实际意义，更要注意巧思妙作，优化过程。

（4）答: 将数学结论还原给实际问题的结果。

19.3、中学数学中常见应用问题与数学模型

（1）优化问题: 实际问题中的“优选”“控制”等问题，常需建立“不等式模型”和“线性规划”问题解决。

（2）预测问题: 经济计划、市场预测这类问题通常设计成“数列模型”来解决。

（3）最（极）值问题: 工农业生产、建设及实际生活中的极限问题常设计成“函数模型”，转化为求函数的最值。

（4）等量关系问题: 建立“方程模型”解决◎

（5）测量问题: 可设计成“图形模型”利用几何知识解决。

第二十题（函数综合题）——*不怕繁杂的代数推理题*

20.1、**不等式证明常用方法：**

(1)比较法：

① 作差比较：$A - B \leqslant 0 \Leftrightarrow A \quad B$

步骤：a.作差：对要比较大小的两个数（或式）作差.

b.变形：对差进行因式分解或配方成几个数（或式）的完全平方和.

c .判断差的符号：结合变形的结果及题设条件判断差的符号.

【注意】：若两个正数作差比较有困难，可以通过它们的平方差来比较大小.

② 求商比较法：要证$a > b$，且$b > 0$，只要证$\dfrac{a}{b} > 1$.

(2)综合分析法：由因导果，执果索因；要证……，只需证……，只需证……

(3)利用基本不等式(柯西不等式)

(4)反证法：对于“至多”“至少”问题、存在性问题、否定形式的命题等，总之“正难则反”

(5)放缩法：

1.定义：指若直接证明不等式较困难，而借助一个或多个中间变量通过适当的放大或缩小，而达到证明不等式成立的一种方法.即证明$A < B$，可构造出函数式C，使$A < C$，且$C < B$，其中数学式C，常通过将A放大，或将B缩小而构成.

2.放缩法证明不等式的**依据**：①不等式的传递性；

② 等量加不等量为不等量；

③ 同分子异分母（或同分母异分子）的两个分式大小的比较等；

3.放缩法的实质是非等价转化，放缩没有确定的准则和程序，放缩目的性很强，需按题意适当放缩.即通过放缩将复杂的一边化简，凑出另一边的形式.

4.放缩法的一些操作**技巧**：

①添加或舍去一些项，如：$\sqrt{a^2+1}>|a|$；$\sqrt{n(n+1)}>n$；

②将分子或分母放大（或缩小）$\frac{n}{2n}\leqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\leqslant\frac{n}{n+1}$；

③利用基本不等式，如：$\lg 3\cdot\lg 5<(\frac{\lg 3+\lg 5}{2})^2=\lg\sqrt{15}<\lg\sqrt{16}=\lg 4$；

$$\sqrt{n(n+1)}<\frac{n+(n+1)}{2};$$

④利用常用结论：

i、$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$；

ii、$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$（程度大）；

$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{(k-1)(k+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1})$（程度小）；

iii、$\frac{1}{2}=\frac{n}{2n}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+2}<\cdots<\frac{1}{n+n}<\frac{n}{n+1}$；

$a>b>0,m>0,n>0$，则 $\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$.

【特例】：$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$，$\frac{2n+1}{2n}<\frac{2n+2}{2n+1}$等.

可推知：

$$\frac{1}{k^3}=\frac{1}{k^2k}<\frac{1}{(k^2-1)k}<\frac{4}{(k^2-1)(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})^2}=\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})^2}{k^2-1}=(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}})^2$$

5.放缩法的常见**题型**：

①一边为无限项的和或积，另一边为定值；

②在证明涉及求和的不等式时，通过逐项放缩的手段，一方面放缩，另一方面使放缩之后便于求和，以达到求和目的；

③恰当引入辅助函数，通过函数单调性达到放缩目的；

④对涉及正整数n的不等式，可以先考虑用数学归纳法进行整体放缩；

⑤运用公式性质，函数单调性；

⑥运用绝对值不等式；

⑦运用二项式定理，利用三角有界性放缩，利用三角形的三边关系进行放缩；

⑧舍弃或添加一些项进行放缩.将部分项放缩，或每项放缩；

⑨裂项利用一些熟悉的关系式放缩；

6.放缩尺度：

放缩法证明不等式，需要根据不等式两端的特点及已知特点，谨慎的采取措施，

进行适当的放缩，任何不适宜都会导致推证的失败，也就是运用放缩法证明不等式要把握放缩的尺度；

放缩法是一种证题技巧，要想用好证题，必须有明确的目标.目标可以从要证明的结论中考查，即要认真的分析结论特点，由结论的特点探究解题规律；

放缩尺度：放缩到可裂项，放缩到可用公式，……

(6)利用函数的单调性（本质仍然是放缩法，与换元法、最值法紧密联系）

(7)换元法：换元的目的就是减少不等式中变量，以使问题化难为易，化繁为简，常用的换元有三角换元和代数换元. 如：

已知 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，可设 $x=a+r\cos\theta, y=b+r\sin\theta$；

已知 $x^2+y^2\leqslant 1$，可设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta\ (0\leqslant r\leqslant 1)$；

已知 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，可设 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$；

已知 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，可设 $x=a\sec\theta, y=b\tan\theta$；

(8)最值法，如：$a>f(x)_{最大值}$，则 $a>f(x)$ 恒成立. $a<f(x)_{最小值}$，则 $a<f(x)$ 恒成立.

(9)构造法：通过构造函数、方程、数列、向量或不等式来证明不等式；具体运用：是构造斜率、点到直线距离、两点间距离、直线与圆的位置关系、辅助圆等.

(10)数学归纳法

20.2、三个“二次”

1。二次函数的基本性质

(1)二次函数的表示法：

$y=ax^2+bx+c$; $y=a(x-x_1)(x-x_2)$; $y=a(x-x_0)^2+n$。

(2)当 $a>0$, $f(x)$ 在区间［p,q］上的最大值 M，最小值 m,令 $x_0=\dfrac{1}{2}(p+q)$。

若 $-\dfrac{b}{2a}<p$,则 $f(p)=m, f(q)=M$;

若 $p\le -\dfrac{b}{2a}<x_0$,则 $f(-\dfrac{b}{2a})=m, f(q)=M$;

若 $x_0\le -\dfrac{b}{2a}<q$,则 $f(p)=M, f(-\dfrac{b}{2a})=m$;

若 $-\dfrac{b}{2a}\geqslant q$,则 $f(p)=M, f(q)=m$。

2。二次方程 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 的实根分布及条件。

(1)方程 $f(x)=0$ 的两根中一根比 r 大，另一根比 r 小 $\Leftrightarrow a\times f(r)<0$;

(2)二次方程$f(x)$=0的两根都大于$r \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > r, \\ a \cdot f(r) > 0 \end{cases}$

(3)二次方程$f(x)$=0在区间(p,q)内有两根$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0, \\ p < -\dfrac{b}{2a} < q, \\ a \cdot f(q) > 0, \\ a \cdot f(p) > 0; \end{cases}$

(4)二次方程$f(x)$=0在区间(p,q)内只有一根$\Leftrightarrow f(p)f(q)<0$,或$f(p)=0$(检验)或$f(q)=0$(检验)检验另一根若在$(p,q)$内成立。

(5)方程$f(x)$=0两根的一根大于p,另一根小于$q(p<q) \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(p) < 0 \\ a \cdot f(q) > 0 \end{cases}$。

3。二次不等式转化策略

(1)二次不等式$f(x)=ax^2+bx+c \le 0$的解集是：$(-\infty,\alpha] \cup [\beta,+\infty) \Leftrightarrow a<0$且$f(\alpha)=f(\beta)=0$;

(2)当$a>0$时，$f(\alpha)<f(\beta) \Leftrightarrow |\alpha+\dfrac{b}{2a}|<|\beta+\dfrac{b}{2a}|$,

当$a<0$时，$f(\alpha)<f(\beta) \Leftrightarrow |\alpha+\dfrac{b}{2a}|>|\beta+\dfrac{b}{2a}|$;

(3)当$a>0$时，二次不等式$f(x)>0$在$[p,q]$恒成立$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} < p, \\ f(p) > 0, \end{cases}$或

$\begin{cases} p \le -\dfrac{b}{2a} < q, \\ f(-\dfrac{b}{2a}) > 0, \end{cases}$或$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} \ge p; \\ f(q) \ge 0; \end{cases}$

(4)$f(x)>0$恒成立$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \Delta < 0, \end{cases}$或$\begin{cases} a = b = 0, \\ c > 0; \end{cases}$ $f(x) < 0$恒成立$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ \Delta < 0, \end{cases}$或$\begin{cases} a = b = 0 \\ c < 0. \end{cases}$

20.3、闭区间上的二次函数的最值

二次函数$f(x) = ax^2 + bx + c(a \ne 0)$在闭区间$[p,q]$上的最值只能在$x = -\dfrac{b}{2a}$处及区间的两端点处取得，具体如下：

(1)当$a>0$时，若$x = -\dfrac{b}{2a} \in [p,q]$，则$f(x)_{\min} = f(-\dfrac{b}{2a}), f(x)_{\max} = \max\{f(p), f(q)\}$；

若$x = -\dfrac{b}{2a} \notin [p,q]$，则$f(x)_{\max} = \max\{f(p), f(q)\}$，

$f(x)_{\min} = \min\{f(p), f(q)\}$.

(2)当 $a<0$ 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$，

若 $x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，则 $f(x)_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$，

$f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$.

20.4、一元二次方程的实根分布

若 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内至少有一个实根.设

$f(x)=x_2+px+q$，则

（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(m,+\infty)$ 内有根的充要条件: $f(m)=0$ 或 $\begin{cases}p^2-4q\geqslant 0\\ -\frac{p}{2}>m\end{cases}$；

（2）方程 $f(x)=0$ 在区间 (m,n) 内有根的充要条件:

$$f(m)f(n)<0 \text{ 或 } \begin{cases}f(m)>0\\ f(n)>0\\ p^2-4q\geqslant 0\\ m<-\frac{p}{2}<n\end{cases}，\text{或} \begin{cases}f(m)=0\\ af(n)>0\end{cases}，\text{或} \begin{cases}f(n)=0\\ af(m)>0\end{cases}；$$

（3）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,n)$ 内有根的充要条件: $f(m)<0$，或 $\begin{cases}p^2-4q\geqslant 0\\ -\frac{p}{2}<m\end{cases}$.

20.5、定区间上含参数的二次不等式恒成立的条件依据

(1)在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L（形如 $[\alpha,\beta]$，$(-\infty,\beta]$，$[\alpha,+\infty)$ 不同）上含参数的二次不等式 $f(x,t)\geqslant 0$（t 为参数)恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{\min}\geqslant 0(x\notin L)$.

(2)在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间上含参数的二次不等式 $f(x,t)\geqslant 0$（t 为参数)恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{man}\leqslant 0(x\notin L)$.

(3) $f(x)=ax^4+bx^2+c>0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases}a\geqslant 0\\ b\geqslant 0\\ c>0\end{cases}$，或 $\begin{cases}a<0\\ b^2-4ac<0\end{cases}$.

20.6、恒成立问题的基本类型及处理思路

1、利用一次函数的性质

类型 1：对于一次函数 $f(x)=kx+b, x\in[m,n]$ 有：

$f(x)>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow$ （i）$\begin{cases} a>0 \\ f(m)>0 \end{cases}$，或（ii）$\begin{cases} a<0 \\ f(n)>0 \end{cases}$；亦可合并定成 $\begin{cases} f(m)>0 \\ f(n)>0 \end{cases}$；

$f(x)<0$ 恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(m)<0 \\ f(n)<0 \end{cases}$

2、利用一元二次函数的判别式

类型 2：设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

（1）$f(x)>0$ 在 $x\in R$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a>0$ 且 $\Delta<0$；

（2）$f(x)<0$ 在 $x\in R$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a<0$ 且 $\Delta<0$.

类型 3：设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

（1）当 $a>0$ 时，$f(x)>0$ 在 $x\in[\alpha,\beta]$ 上恒成立

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{2a}<\alpha \\ f(\alpha)>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \alpha\leqslant \frac{b}{2a} \leqslant\beta \\ \Delta<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{b}{2a}>\beta \\ f(\beta)>0 \end{cases}$，

$f(x)<0$ 在 $x\in[\alpha,\beta]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)<0 \\ f(\beta)<0 \end{cases}$

（2）当 $a<0$ 时，$f(x)>0$ 在 $x\in[\alpha,\beta]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)>0 \\ f(\beta)>0 \end{cases}$

$f(x)<0$ 在 $x\in[\alpha,\beta]$ 上恒成立

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{2a}<\alpha \\ f(\alpha)>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \alpha\leqslant \frac{b}{2a} \leqslant\beta \\ \Delta<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{b}{2a}>\beta \\ f(\beta)<0 \end{cases}$

3、利用函数的最值（或值域）

类型 4：$f(x)>\alpha$ 对一切 $x\in I$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}>\alpha$

$f(x)<\alpha$ 对一切 $x\in I$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}<\alpha$.

类型 5：$f(x)>g(x)$ 对于任意的 $x\in[a,b]$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$，或

$f(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 上的图像始终在 $g(x)$ 的上方.（通常移项，使

$h(x)_{\min}=f(x)-g(x)>0$ 即可；

若 $h(x)$ 的最值无法求出，则考虑数形结合，只需在 $x\in[a,b]$ 上 $f(x)$

的图像始终在 $g(x)$ 的上方即可.）

20.7、定区间上含参数的不等式恒成立(或有解)的条件依据

(1)在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L（形如 $[\alpha,\beta]$，$(-\infty,\beta]$，$[\alpha,+\infty)$ 不同）上含参数的不等式 $f(x)\geqslant t$（t 为参数)恒成立.

充要条件：$f(x)_{\min}\geqslant t,(x\in L)$.

(2)在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L 上含参数的不等式 $f(x)\leqslant t$（t 为参数)恒成立.

充要条件：$f(x)_{\max}\leqslant t,(x\in L)$.

(3)在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L 上含参数的不等式 $f(x)\geqslant t$（t 为参数)的有解.

充要条件：$f(x)_{\max}\geqslant t,(x\in L)$.

(4)在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L 上含参数的不等式 $f(x)\leqslant t$（t 为参数)有解.

充要条件：$f(x)_{\min}\leqslant t,(x\in L)$.

对于参数 a 及函数 $y=f(x),x\in A$.

若 $a\geqslant f(x)$ 恒成立，则 $a\geqslant f_{\max}(x)$；

若 $a\leqslant f(x)$ 恒成立，则 $a\leqslant f_{\min}(x)$；

若 $a\geqslant f(x)$ 有解，则 $a\geqslant f_{\min}(x)$；

若 $a\leqslant f(x)$ 有解，则 $a\leqslant f_{\max}(x)$；

若 $a=f(x)$ 有解，则 $f_{\min}(x)\leqslant a\leqslant f_{\max}(x)$.

（若函数 $y=f(x),x\in A$ 无最大值或最小值的情况，可以仿此推出相应结论）.

……

……

……

【知识疏漏】：

1.对数的换底公式 ：$\log_a N=\dfrac{\log_m N}{\log_m a}$ （$a>0$，且$a\neq 1$，$m>0$，且$m\neq 1$，$N>0$）.

对数恒等式：$a^{\log_a N}=N$（$a>0$，且$a\neq 1$，$N>0$）.

【推论】：$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$（$a>0$，且$a\neq 1$，$N>0$）.

2．对数的四则运算法则:若 a＞0，a≠1，M＞0，N＞0，则

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$； (2) $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\log_a M(n\in R)$； (4) $\log_{a^m} N^n=\dfrac{n}{m}\log_a N(n,m\in R)$。

3.设函数 $f(x)=\log_m(ax^2+bx+c)(a\neq 0)$，记$\Delta=b^2-4ac$.若$f(x)$的定义域为$R$，则$a>0$且$\Delta<0$；若$f(x)$的值域为$R$，则$a>0$，且$\Delta\geq 0$。

4. 对数换底不等式及其推广：设$n>m>1$，$p>0$，$a>0$，且$a\neq 1$，则

（1）$\log_{m+p}(n+p)<\log_m n$.　　（2）$\log_a m\log_a n<\log_a{}^2\dfrac{m+n}{2}$.

5.平均增长率的问题（负增长时$p<0$）

如果原来产值的基础数为N，平均增长率为p，则对于时间x的总产值y，有$y=N(1+p)^x$.

6.等差数列的通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d(n\in N^*)$；

广义通项：$a_n=a_m+(n-m)d=a_m+dn-dm(n\in N^*)$.

其前n项和公式为：$s_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{1}{2}d)n$.

7.等比数列的通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{a_1}{q}\cdot q^n(n\in N^*)$；

广义通项：$a_n=a_mq^{n-m}=\frac{a_m}{q^m}\cdot q^n\ (n\in N^*)$.

其前n项的和公式为$s_n=\begin{cases}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},q\neq 1\\ na_1,q=1\end{cases}$ 或$s_n=\begin{cases}\frac{a_1-a_nq}{1-q},q\neq 1\\ na_1,q=1\end{cases}$.

8. 等比差数列$\{a_n\}:a_{n+1}=qa_n+d,a_1=b(q\neq 0)$的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}b+(n-1)d,q=1\\ \frac{bq^n+(d-b)q^{n-1}-d}{q-1},q\neq 1\end{cases};$$

其前n项和公式为：$s_n=\begin{cases}nb+n(n-1)d,(q=1)\\ (b-\frac{d}{1-q})\frac{1-q^n}{q-1}+\frac{d}{1-q}n,(q\neq 1)\end{cases}$.

9.分期付款(按揭贷款)：每次还款$x=\frac{ab(1+b)^n}{(1+b)^n-1}$元(贷款$a$元,$n$次还清,每期利率为$b$).

10.平面向量基本定理

如果e_1、e_2是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量，有且只有一对实数λ_1,λ_2，使得$a=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$.

不共线的向量e_1、e_2叫做表示这一平面内所有向量的一组**基底**.

三点A、B、C共线的充要条件：$MC=\lambda MA+(1-\lambda)MB$（M为任意点）

11.夹角公式

(1) $\tan\alpha=|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}|$.（$l_1:y=k_1x+b_1$，$l_2:y=k_2x+b_2$，$k_1k_2\neq -1$）

(2) $\tan\alpha=|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}|$.($l_1:A_1x+B_1y+C_1=0,l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_1A_2+B_1B_2\neq 0$).

直线$l_1\perp l_2$时，直线l_1与l_2的夹角是$\frac{\pi}{2}$.

12. l_1到l_2的角公式

(1) $\tan\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$.($l_1:y=k_1x+b_1$, $l_2:y=k_2x+b_2$, $k_1k_2\neq-1$)

(2) $\tan\alpha=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.($l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_1A_2+B_1B_2\neq0$).

直线$l_1\perp l_2$时，直线l_1到l_2的角是$\frac{\pi}{2}$.

13. **三角函数的周期公式**

函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$， x∈R 及函数 $y=\cos(\omega x+\varphi)$， x∈R(A, ω, φ为常数，且 A≠0)的周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$；函数 $y=\tan(\omega x+\varphi)$， $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$ (A, ω, φ为常数，且 A≠0)的周期$T=\frac{\pi}{|\omega|}$