武汉市2014届高三4月调研测试

数　学（文科）

2014.4.17

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合$A=\{x|x^2=1\}$，$B=\{x|ax=1\}$．若$B\subseteq A$，则实数a的集合为

A．$\{-1，0，1\}$　B．$\{-1，1\}$　C．$\{-1，0\}$　D．$\{0，1\}$

2．若一元二次不等式$2kx^2+kx-<0$对一切实数x都成立，则k的取值范围为

A．$(-3，0]$　B．$[-3，0)$　C．$[-3，0]$　D．$(-3，0)$

3．同时掷两个骰子，则向上的点数之差的绝对值为4的概率是

A．　B．　C．　D．

4．已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n-$，且$a_1=5$，设$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则使得S_n取得最大值的序号n的值为

A．7　B．8　C．7或8　D．8或9

5．已知命题p：$\exists\varphi\in\mathbf{R}$，使$f(x)=\sin(x+\varphi)$为偶函数；命题$q$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\cos2x+4\sin x-3<0$，则下列命题中为真命题的是

A．$p\wedge q$　B．$(\neg p)\vee q$

C．$p\vee(\neg q)$　D．$(\neg p)\wedge(\neg q)$

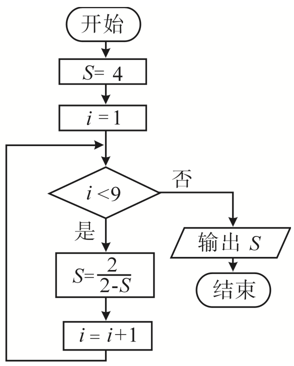
6．执行如图所示的程序框图，则输出的S的值是

A．-1

B．

C．

D．4



7．已知棱长为1的正方体的俯视图是一个面积为1的正方形，则该正方体的正视图的面积不可能等于

A．1　B．　C．　D．

8．在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c．若A，B，C成等差数列，$2a$，$2b$，$3c$成等比数列，则$\cos A\cos C=$

A．0　B．　C．　D．

9．设函数$f(x)=e^{x-1}+4x-4$，$g(x)=\ln x-$．若$f(x_1)=g(x_2)=0$，则

A．$0<g(x_1)<f(x_2)$　B．$g(x_1)<0<f(x_2)$

C．$f(x_2)<0<g(x_1)$　D．$f(x_2)<g(x_1)<0$

10．已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，过点$P(2，0)$的直线交抛物线于A，B两点，直线AF，BF分别与抛物线交于点C，D．设直线AB，CD的斜率分别为k_1，k_2，则$=$

A．　B．　C．1　D．2

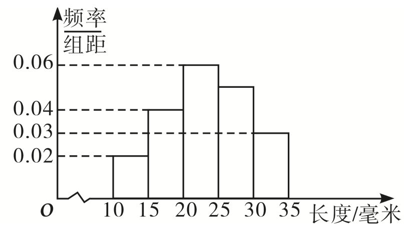
二、填空题：本大题共7小题，每小题5分，共35分．请将答案填在答题卡对应题号的位置上．答错位置，书写不清，模棱两可均不得分．

11．若复数$(m^2-5m+6)+(m^2-3m)i$（m为实数，i为虚数单位）是纯虚数，则$m=$_____．

12．若变量x，y满足约束条件则目标函数$z=2x+3y$的最大值为_____．

13．已知过点 $P(1，2)$的直线与圆 $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 相切，且与直线 $ax+y-1=0$ 垂直，则 $a=$______.

14．对一批产品的长度（单位：毫米）进行抽样检测，右图为检测结果的频率分布直方图．根据标准，产品长度在区间[20，25)上为一等品，在区间[15，20)和[25，30)上为二等品，在区间[10，15)和[30，35)上为三等品．用频率估计概率，现从该批产品中随机抽取 1 件，则其为二等品的概率是______.



15．若关于 x 的不等式$|ax+3|<5$的解集为（－1，4），则实数 a 的值为______.

16．在计算“$1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)$º时，某同学学到了如下一种方法：

先改写第 k 项：$k(k+1)=[k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)]$，

由此得 $1\times2=(1\times2\times3-0\times1\times2)$，

$2\times3=(2\times3\times4-1\times2\times3)$，

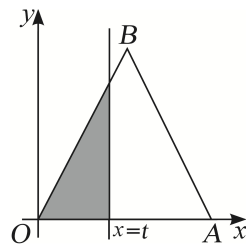
¼ ¼

$n(n+1)=[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]$.

相加，得 $1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=n(n+1)(n+2)$.

类比上述方法，请你计算“$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)$º，其结果为 ．（结果写成关于 n 的一次因式的积的形式）

17．如图，△OAB 是边长为 2 的正三角形，记△OAB 位于直线 $x=t$（$0<t\leqslant2$）左侧的图形的面积为 $f(t)$，则



（Ⅰ）函数 $f(t)$的解析式为________________________；

（Ⅱ）设函数 $y=f(t)$的图象在点 $P(t_0，f(t_0))$处的切线的斜率为，则 $t_0=$________.

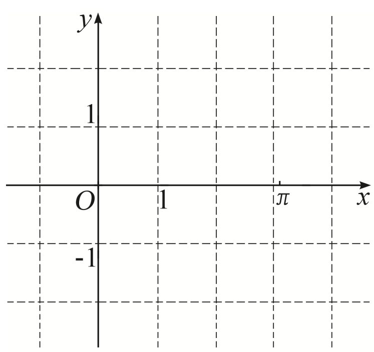
三、解答题：本大题共 5 小题，共 65 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

18．（本小题满分 12 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x-\sin x，\cos x+\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x，-\sin x)$，$\boldsymbol{c}=(2，1)$，其中 $x\in[0，\pi]$.

（Ⅰ）若$(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$，求 x；

（Ⅱ）设函数 $f(x)$是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影，在给出的直角坐标系中，画出 $y=f(x)$在[0，π]上的图象．



19．（本小题满分 12 分）

在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=4$，$a_{n+1}=3a_n-4n+2$（$n\in\mathbf{N}^*$）．

（Ⅰ）记$b_n=a_n-2n$，试判断数列$\{b_n\}$是等差数列，还是等比数列？并证明你的判断；

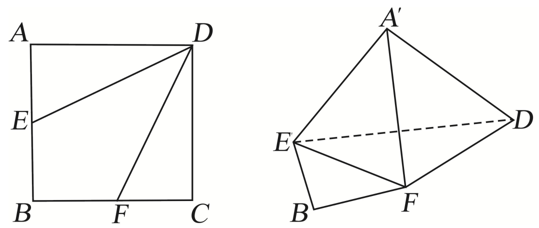
（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n．

20．（本小题满分 13 分）

如图，在边长为 2 的正方形$ABCD$中，E，F分别是AB，BC的中点，将$\triangle ADE$，$\triangle CDF$分别沿DE，DF折起，使A，C两点重合于点A'．

（Ⅰ）求证：平面$A'DE\perp$平面$A'EF$；

（Ⅱ）求三棱锥A'-DEF的体积．



21．（本小题满分 14 分）

已知函数$f(x)=a\ln x+bx^2-(a+b)x$．

（Ⅰ）当$a=1$，$b=0$时，求$f(x)$的最大值；

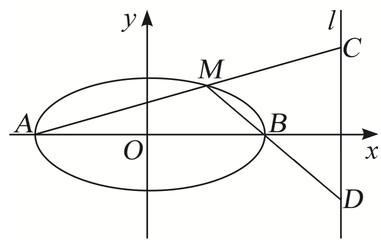
（Ⅱ）当$b=1$时，设α，β是$f(x)$的两个极值点，且$\alpha<\beta$，$\beta\in(1，e]$（其中 e 为自然对数的底数）．求证：对任意的x_1，$x_2\in[\alpha，\beta]$，$|f(x_1)-f(x_2)|<1$．

22．（本小题满分 14 分）

如图，A、B是椭圆Γ：$+y^2=1$的左、右顶点，M是椭圆Γ上位于x轴上方的动点，直线AM、BM与直线l：$x=4$分别交于C、D两点．

（Ⅰ）若$|CD|=4$，求点M的坐标；

（Ⅱ）记$\triangle MAB$和$\triangle MCD$的面积分别为S_1和S_2．是否存在实数λ，使得$S_1=\lambda S_2$？若存在，求出λ的取值范围；若不存在，说明理由．



武汉市2014届高三4月调研测试

数学（文科）试题参考答案及评分标准

一、选择题

1．A　2．D　　3．C　4．C　5．C

6．D　7．C　8．A　　9．B　10．B

二、填空题

11．2　12．14　13．　　14．0.45　15．-2　16．$n(n+1)(n+2)(n+3)$

17．（Ⅰ）$f(t)=$；（Ⅱ）或

三、解答题

18．（本小题满分12分）

解：（Ⅰ）由已知，得$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(7\cos x-3\sin x，3\cos x-\sin x)$，

$\because(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$，又$\boldsymbol{c}=(2，1)$，

$\therefore 7\cos x-3\sin x-2(3\cos x-\sin x)=0$，

化简，得$\cos x=\sin x$，$\therefore\tan x=1$．

$\because x\in[0，\pi]$，$\therefore x=$．……………………………………………………………6分

（Ⅱ）$f(x)==(\cos x-\sin x)\cos x+(\cos x+\sin x)(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x=\cos 2x-\sin 2x$

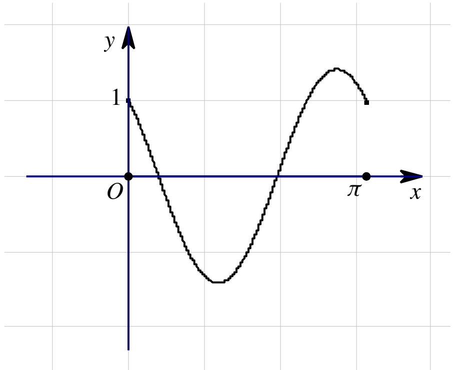
$=(\cos 2x-\sin 2x)$

$=\cos(2x+)$.

列表如下：

x	0					π
y	1	0	$-$	0		1

故 $y=f(x)$在$[0，\pi]$上的图象为……………………………………………………12 分



19．（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）法（一）：∵ $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-2(n+1)-(a_n-2n)$

$=a_{n+1}-a_n-2=3a_n-4n+2-a_n-2=2(a_n-2n)=2b_n$，

∴$b_{n+1}=3b_n$，即$=3$，又 $b_1=a_1-2=2$，

∴数列$\{b_n\}$是以 2 为首项，3 为公比的等比数列．……………………………6 分

法（二）：∵$====3$，

又 $b_1=a_1-2=2$，

∴数列$\{b_n\}$是以 2 为首项，3 为公比的等比数列．……………………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），得 $b_n=2\times3^{n-1}$，即 $a_n-2n=2\times3^{n-1}$，

∴$a_n=2\times3^{n-1}+2n$，

∴$S_n=2(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})+2(1+2+3+\cdots+n)$

$=2\times+n(n+1)$

$=3^n-1+n(n+1)$．………………………………………………………12 分

20．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）折叠前，$AD\perp AE$，$CD\perp CF$，

折叠后，$A'D\perp A'E$，$A'D\perp A'F$，

又∵$A'E\cap A'F=A'$，

∴$A'D\perp$平面 $A'EF$．

∵$A'D\subset$平面 $A'DE$，

∴平面 $A'DE\perp$平面 $A'EF$．……………………………………………………6 分

（Ⅱ）∵E，F 分别是 AB，BC 的中点，

∴$AE=BE=BF=1$，$EF=$，

折叠后，$A'E=A'F=1$，

∴$A'E^2+A'F^2=EF^2$，∴$A'E\perp A'F$，

∴$S_{\triangle A'EF}=A'E\times A'F=\times1\times1=$．

由（Ⅰ），知 $A'D\perp$平面 $A'EF$，

∴$V_{A'\text{-}DEF}=V_{D\text{-}A'EF}=S_{\triangle A'EF}´A'D=\times\times2=$．…………………………13 分

21．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$的定义域为（0，＋∞）．

当 $a=1$，$b=0$ 时，$f(x)=\ln x-x$．

求导数，得 $f'(x)=-1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$．

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$在$(0，1)$上是增函数；

当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，∴$f(x)$在$(1，+\infty)$上是减函数．

故 $f(x)$在 $x=1$ 处取得最大值 $f(1)=-1$．……………………………………………4 分

（Ⅱ）当 $b=1$ 时，$f(x)=a\ln x+x^2-(a+1)x$．

求导数，得 $f'(x)=+x-(a+1)==$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，或 $x=a$．

∵α，β 是 $f(x)$的两个极值点，且 α<β，β∈(1，e]，

∴α＝1，β＝a∈(1，e]，

∴当 x∈[α，β]时，$f'(x)\le 0$，∴$f(x)$在[α，β]上单调递减，

∴$f(x)_{\max}=f(1)$，$f(x)_{\min}=f(a)$，

∴对任意的 x_1，x_2∈[α，β]，

$|f(x_1)-f(x_2)|\le f(1)-f(a)=[-(a+1)]-[a^2+a\ln a-a(a+1)]=a^2-a\ln a-$．

令 $g(a)=a^2-a\ln a-$，则 $g'(a)=a-1-\ln a$，

由（Ⅰ），知 $\ln x-x\le -1$，即 $\ln x\le x-1$，

∴$g'(a)\geqslant 0$，∴$g(a)$在(1，e]上单调递增，

∴$g(a)\le g(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-=\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)-<3(-1)-=1$．

故对任意的 x_1，x_2∈[α，β]，$|f(x_1)-f(x_2)|<1$．………………………………14 分

22．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）直线 AM 的斜率 k 显然存在，且 $k>0$，

故可设直线 AM 的方程为 $y=k(x+2)$，

由得∴$C(4，6k)$．

由消去 y 并整理，得$(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$．

设 $M(x_0，y_0)$，则$(-2)\cdot x_0=$，∴$x_0=$，从而 $y_0=$，

即 $M(，)$，又 $B(2，0)$，

故直线 BM 的方程为 $y=-(x-2)$．

由得∴$D(4，-)$．

∴$|CD|=|6k+|=6k+$（$k>0$）．

由$|CD|=4$，得 $6k+=4$，解得 $k=$，或 $k=$．

从而求得 $M(0，1)$，或 $M(，)$．…………………………………………………………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），得 $M(，)$．

∴$S_1=|AB|\cdot|y_M|=\times 4\times||=$，

$S_2=|CD|\cdot|4-x_M|=\times|6k+|\times|4-|=$．

假设存在实数 λ，使得 $S_1=\lambda S_2$，则

$\lambda====\leqslant=$，

当且仅当 $144k^2=$，即 $k=$时，等号成立．

又∵λ>0，∴$0<\lambda\le$．

故存在 λ∈(0，]，使得 $S_1=\lambda S_2$．……………………………………………14 分