武汉市2014届高三4月调研测试

数　学（理科）

2014.4.17

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若复数－1（a为实数，i为虚数单位）是纯虚数，则a＝

A．7　B．－7　C．　D．－

2．若一元二次不等式$2kx^2+kx-<0$对一切实数x都成立，则k的取值范围为

A．(－3，0]　B．[－3，0)　C．[－3，0]　D．(－3，0)

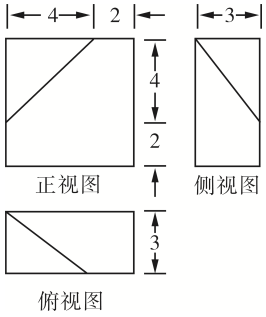
3．已知某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则该几何体的体积是

A．108cm^3

B．100cm^3

C．92cm^3

D．84cm^3



4．已知命题p：$\exists\varphi\in\mathbf{R}$，使$f(x)=\sin(x+\varphi)$为偶函数；命题$q$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\cos2x+4\sin x-3<0$，则下列命题中为真命题的是

A．$p\wedge q$　B．$(\neg p)\vee q$　C．$p\vee(\neg q)$　D．$(\neg p)\wedge(\neg q)$

5．已知O为坐标原点，F为抛物线C：$y^2=4x$的焦点，P为C上一点，若$|PF|=4$，则$\triangle POF$的面积为

A．2　B．2　C．2　D．4

6．在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c．若A，B，C成等差数列，$2a$，$2b$，$3c$成等比数列，则$\cos A\cos C=$

A．0　B．　C．　D．

7．安排6名歌手演出顺序时，要求歌手乙、丙均排在歌手甲的前面或者后面，则不同排法的种数是

A．180　B．240　C．360　D．480

8．设a_1，a_2，a_3均为正数，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$，则函数$f(x)=++$的两个零点分别位于区间

A．$(-\infty,\lambda_1)$和(λ_1,λ_2)内

B．(λ_1,λ_2)和(λ_2,λ_3)内

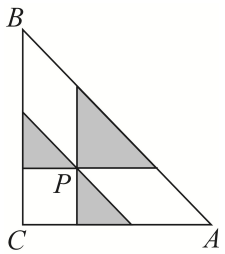
C．(λ_2,λ_3)和$(\lambda_3,+\infty)$内

D．$(-\infty,\lambda_1)$和$(\lambda_3,+\infty)$内

9．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$CA=CB=1$，P为$\triangle ABC$内一点，过P分别引三边的平行线，与各边围成以P为顶点的三个三角形（图中阴影部分），则这三个三角形的面积和的最小值为

A．　B．

C．　D．



10．设函数$f(x)=x^3+3bx^2+3cx$有两个极值点x_1，x_2，且$x_1\in[-$

1，0]，$x_2\in[1，2]$，则

A．$-10\leqslant f(x_1)\leqslant -$　　B．$-\leqslant f(x_1)\leqslant 0$

C．$0\leqslant f(x_1)\leqslant$　　D．$\leqslant f(x_1)\leqslant 10$

二、填空题：本大题共 6 小题，考生共需作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．请将答案填在答题卡对应题号的位置上．答错位置，书写不清，模棱两可均不得分．

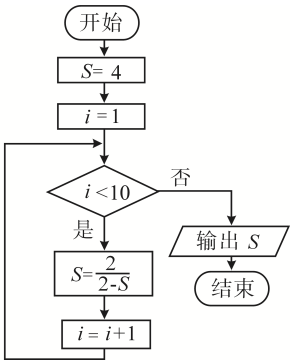
（一）必考题（11Ð 14 题）

11．一个车间为了规定工时定额，需要确定加工零件所花费的时间，为此进行了 5 次试验，收集数据如下：

零件数 x（个）	10	20	30	40	50
加工时间 y（分钟）	64	69	75	82	90

由表中数据，求得线性回归方程为$y=0.65x+a$．根据回归方程，预测加工 70 个零件所花费的时间为_____分钟．

12．执行如图所示的程序框图，则输出的 S 的值是_____．



13．在计算“$1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)$º时，某同学学到了如下一种方法：

先改写第 k 项：$k(k+1)=[k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)]$，

由此得 $1\times2=(1\times2\times3-0\times1\times2)$，

$2\times3=(2\times3\times4-1\times2\times3)$，

¼ ¼

$n(n+1)=[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]$．

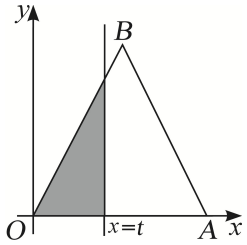
相加，得 $1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=n(n+1)(n+2)$．

类比上述方法，请你计算“$1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$º，其结果为_____．（结果写成关于 n 的一次因式的积的形式）

14．如图，$\triangle OAB$ 是边长为 2 的正三角形，记$\triangle OAB$ 位于直线 $x=t$（$0<t\leqslant2$）左侧的图形的面积为 $f(t)$，则

（Ⅰ）函数 $f(t)$的解析式为_____；

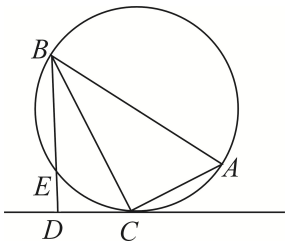
（Ⅱ）函数 $y=f(t)$的图象与直线 $t=2$、t 轴所围成的图形的面积为_____．



（二）选考题（请考生在第 15、16 两题中任选一题作答，请先在答题卡指定位置将你所选的题目序号后的方框用 2B 铅笔涂黑．如果全选，则按第 15 题作答结果计分．）

15．（选修4-1：几何证明选讲）

如图，在△ABC中，∠C＝90°，∠A＝60°，过C作△ABC的外接圆的切线CD，BD⊥CD于D，BD与外接圆交于点E，已知DE＝5，则△ABC的外接圆的半径为_____．



16．（选修4-4：坐标系与参数方程）

在直角坐标系xOy中，以原点O为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系．已知直线ρsin(θ＋)＝与曲线（t为参数）相交于A，B两点，若M为线段AB的中点，则直线OM的斜率为_____．

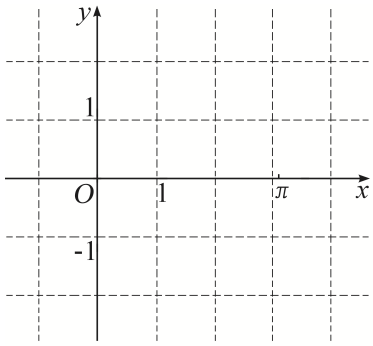
三、解答题：本大题共6小题，共75分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分12分）

已知向量$\boldsymbol{a}=(\cos x-\sin x,\ \cos x+\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,\ -\sin x)$，$\boldsymbol{c}=(2,\ 1)$，其中$x\in[0,\ \pi]$．

（Ⅰ）若$(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$，求$x$；

（Ⅱ）设函数$f(x)$是$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影，在给出的直角坐标系中，画出$y=f(x)$在$[0,\ \pi]$上的图象．



18．（本小题满分12分）

在等比数列$\{a_n\}$中，其前n项和为S_n，已知a_3＝，S_3＝．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

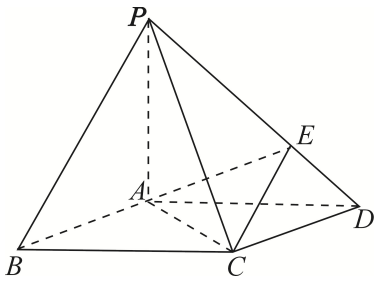
（Ⅱ）是否存在正整数n，使得S_n-S_{n+2}＝？并说明理由．

19．（本小题满分12分）

如图，在底面是菱形的四棱锥P-$ABCD$中，∠ABC＝60°，PA＝AC＝1，PB＝PD＝，点E在PD上，且PE＝2ED．

（Ⅰ）求二面角P-AC-E的大小；

（Ⅱ）试在棱PC上确定一点F，使得BF∥平面AEC．



20．（本小题满分 12 分）

一个袋中装有若干个大小相同的黑球、白球和红球．已知从袋中任意摸出 1 个球，得到黑球的概率是；从袋中任意摸出 2 个球，至少得到 1 个白球的概率是．

（Ⅰ）若袋中共有 10 个球，

（ⅰ）求白球的个数；

（ⅱ）从袋中任意摸出 3 个球，记得到白球的个数为 ξ，求 ξ 的数学期望 $E\xi$．

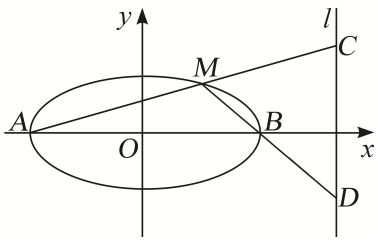
（Ⅱ）求证：从袋中任意摸出 2 个球，至少得到 1 个黑球的概率不大于．

21．（本小题满分 13 分）

如图，A、B 是椭圆 Γ：$+y^2=1$ 的左、右顶点，M 是椭圆 Γ 上位于 x 轴上方的动点，直线 AM、BM 与直线 l：$x=4$ 分别交于 C、D 两点．

（Ⅰ）若 $|CD|=4$，求点 M 的坐标；

（Ⅱ）记△MAB 和△MCD 的面积分别为 S_1 和 S_2．是否存在实数 λ，使得 $S_1=\lambda S_2$？若存在，求出 λ 的取值范围；若不存在，说明理由．



22．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)-ax^2$（$a\geqslant 0$），l 是曲线 $y=g(x)$ 的一条切线，证明：曲线 $y=g(x)$ 上的任意一点不可能在直线 l 的上方；

（Ⅲ）求证：(1＋)(1＋)(1＋)¼ [1＋]＜e（其中 e 为自然对数的底数，$n\in\mathbf{N}^*$）．

武汉市 2014 届高三 4 月调研测试

数学（理科）试题参考答案及评分标准

一、选择题

1．A　2．D　3．B　4．C　5．C

6．A　7．D　8．B　9．C　10．C

二、填空题

11．102　12．－1　13．$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

14．（Ⅰ）$f(t)=$；（Ⅱ）

15．10　16．－

三、解答题

17．（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由已知，得 $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(7\cos x-3\sin x，3\cos x-\sin x)$，

$\because(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$，又 $\boldsymbol{c}=(2，1)$，

$\therefore 7\cos x-3\sin x-2(3\cos x-\sin x)=0$，

化简，得 $\cos x=\sin x$，$\therefore \tan x=1$．

$\because x\in[0，\pi]$，$\therefore x=$．……6 分

（Ⅱ）$f(x)==(\cos x-\sin x)\cos x+(\cos x+\sin x)(-\sin x)$

$=\cos^2x-\sin^2x-2\sin x\cos x=\cos 2x-\sin 2x$

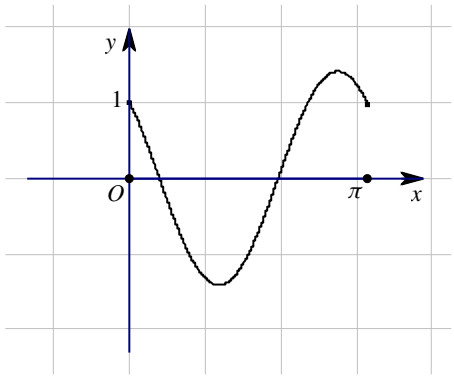
$=(\cos 2x-\sin 2x)$

$=\cos(2x+)$．

列表如下：

x	0					π
y	1	0	－	0		1

故 $y=f(x)$在$[0，\pi]$上的图象为……12 分



18．（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的公比为 q，则

$S_3=a_1+a_2+a_3=a_3(q^{-2}+q^{-1}+1)$，

由 $a_3=$，$S_3=$，得$(q^{-2}+q^{-1}+1)=$，

$\therefore q^{-2}+q^{-1}+1=3$，即 $2q^2-q-1=0$．

解得 $q=1$，或 $q=-$．

当 $q=1$ 时，$a_1=$，此时 $a_n=$；

当 $q=-$时，$a_1=6$，此时 $a_n=6\times(-)^{n-1}$．……6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），得

① 当 $a_1=$，$q=1$ 时，$S_n=n$，$\therefore S_n-S_{n+2}=n-(n+2)=-3\neq$．

② 当 $a_1=6$，$q=-$时，$S_n==4[1-(-)^n]$．

由 $S_n-S_{n+2}=$，得 $4[1-(-)^n]-4[1-(-)^{n+2}]=$，

$\therefore 4(-)^{n+2}-4(-)^n=$，即$(-)^n-4(-)^n=$，

$\therefore -3(-)^n=$，即$(-)^n=-$，解得 $n=5$．

综合①②知，存在 $n=5$，使得 $S_n-S_{n+2}=$．……12 分

19．（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$\because$底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60°$，

$\therefore AB=AD=AC=1$，

在$\triangle PAB$ 中，由 $PA^2+AB^2=2=PB^2$，知 $PA\perp AB$．

同理，$PA\perp AD$．$\therefore PA\perp$平面 $ABCD$．

建立如图所示的空间直角坐标系 $A\text{-}xyz$，则 $A(0，0，0)$，$B($，

－，0)，C(，，0)，P(0，0，1)，D(0，1，0)，E(0，，).

∴\s\up7(→)＝(，，0)，\s\up7(→)＝(0，，).

设平面 ACE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}$＝(x，y，z)，则

即

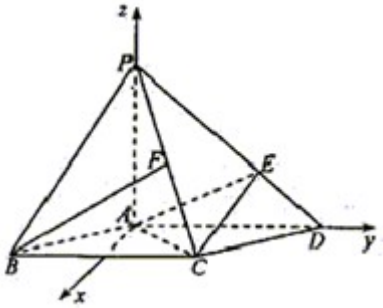
取 y＝－，则 $\boldsymbol{n}$＝(1，－，2).

同理，平面 ACP 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}$＝(，－，0)，

∴cos＜$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$＞＝＝＝，

∴＜$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$＞＝60°.

故二面角 P-AC-E 的大小为 60°.



……6 分

（Ⅱ）设\s\up7(→)＝λ\s\up7(→)（0＜λ＜1），

∵\s\up7(→)＝(，，－1)，\s\up7(→)＝(－，，1)，

∴\s\up7(→)＝\s\up7(→)＋\s\up7(→)＝\s\up7(→)＋λ\s\up7(→)＝(－，，1)＋(λ，λ，－λ)

＝((λ－1)，(λ＋1)，1－λ)，

由 BF∥平面 AEC，知\s\up7(→)⊥$\boldsymbol{n}$，

∴(λ－1)×1＋(λ＋1)×(－)＋(1－λ)×2＝0，

解得 λ＝.

∴当 F 是棱 PC 的中点时，BF∥平面 AEC. ……12 分

20．（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）（ⅰ）记“从袋中任意摸出 2 个球，至少得到 1 个白球”为事件 A，

设袋中白球的个数为 x，则

$P(A)$＝1－＝，

解得 x＝5，故白球有 5 个.

（ⅱ）随机变量 ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，则

P(ξ＝0)＝＝；P(ξ＝1)＝＝；

P(ξ＝2)＝＝；P(ξ＝3)＝＝.

∴ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P				

∴E(ξ)＝0×＋1×＋2×＋3×＝. ……8 分

（Ⅱ）设袋中有 n 个球，其中 y 个黑球，由题意得 y＝n，

∴2y＜n，2y≤n－1，故≤.

记“从袋中任意摸出 2 个球，至少得到 1 个黑球”为事件 B，则

$P(B)$＝＋×≤＋×＝. ……12 分

21．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）直线 AM 的斜率 k 显然存在，且 k＞0，

故可设直线 AM 的方程为 y＝k(x＋2)，

由得∴C(4，6k).

由消去 y 并整理，得(1＋4k^2)x^2＋16k^2x＋16k^2－4＝0.

设 M(x_0，y_0)，则(－2)・x_0＝，∴x_0＝，从而 y_0＝，

即 M(，)，又 B(2，0)，

故直线 BM 的方程为 $y=-(x-2)$.

由得∴$D(4,\ -)$.

∴$|CD|=|6k+|=6k+$（$k>0$）.

由$|CD|=4$，得 $6k+=4$，解得 $k=$，或 $k=$.

从而求得 $M(0,\ 1)$，或 $M(,\ )$. ……6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），得 $M(,\ )$.

∴$S_1=|AB|\cdot|y_M|=\times4\times||=$，

$S_2=|CD|\cdot|4-x_M|=\times|6k+|\times|4-|=$.

假设存在实数 λ，使得 $S_1=\lambda S_2$，则

λ=====≤=，

当且仅当 $144k^2=$，即 $k=$时，等号成立.

又∵λ>0，∴0<λ≤.

故存在 λ∈(0，]，使得 $S_1=\lambda S_2$. ……13 分

22. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(-1,\ +\infty)$.

求导数，得 $f'(x)=-1=-$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$.

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$在$(-1,\ 0)$上是增函数；

当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，∴$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上是减函数.

故 $f(x)$在 $x=0$ 处取得最大值 $f(0)=0$. ……4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ），得 $g(x)=\ln(x+1)-ax^2-x$（$a\geqslant0$）.

设 $M(x_0,\ g(x_0))$是曲线 $y=g(x)$上的一点，则

$y=g(x)$在点 M 处的切线方程为 $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)$，

即 $y=(-2ax_0-1)(x-x_0)+f(x_0)$.

令 $h(x)=g(x)-[(-2ax_0-1)(x-x_0)+f(x_0)]$，则

$h'(x)=-2ax-1-(-2ax_0-1)$，

∵$h'(x_0)=0$，$h'(x)$在$(-1,\ +\infty)$上是减函数，

∴$h(x)$在$(-1,\ x_0)$上是增函数，在$(x_0,\ +\infty)$上是减函数，

∴$h(x)$在 $x=x_0$ 处取得最大值 $h(x_0)=0$，即 $h(x)\leqslant0$ 恒成立.

故曲线 $y=g(x)$上的任意一点不可能在直线 l 的上方. ……9 分

（Ⅲ）由（Ⅰ），知 $\ln(x+1)\leqslant x$ 在$(-1,\ +\infty)$上恒成立，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

故当 $x>-1$ 且 $x\neq0$ 时，有 $\ln(x+1)<x$.

又∵=2(−)，

∴ln{(1+)(1+)(1+)¼ [1+]}

=ln(1+)+ln(1+)+ln(1+)+…+ln[1+]

<+++…+

=2[(−)+(−)+(−)+…+(−)]

=2(−)=1−<1，

∴(1+)(1+)(1+)¼ [1+]<e. ……14 分