高中数学知识点总结

1. 对于集合，一定要抓住集合的代表元素，及元素的“确定性、互异性、无序性”。

如：集合$A=\{x|y=\lg x\}$，$B=\{y|y=\lg x\}$，$C=\{(x,y)|y=\lg x\}$，A、B、C中元素各表示什么？

2. 进行集合的交、并、补运算时，不要忘记集合本身和空集$\varnothing$的特殊情况。注重借助于数轴和文氏图解集合问题。

空集是一切集合的子集，是一切非空集合的真子集。

如：集合$A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x|ax=1\}$

若$B\subset A$，则实数a的值构成的集合为_____

（答：$\left\{-1,\ 0,\ \frac{1}{3}\right\}$）

3. 注意下列性质：

（1）集合$\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$的所有子集的个数是$2^n$；

（2）若$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$，$A\cup B=B$；

（3）德摩根定律：

$$C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB),\quad C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB)$$

4. 你会用补集思想解决问题吗？（排除法、间接法）

如：已知关于x的不等式$\frac{ax-5}{x^2-a}<0$的解集为M，若$3\in M$且$5\notin M$，求实数a的取值范围。

（$\because 3\in M$，$\therefore \frac{a\cdot 3-5}{3^2-a}<0$

$\because 5\notin M$，$\therefore \frac{a\cdot 5-5}{5^2-a}\geq 0$

$\Rightarrow a\in\left[1,\ \frac{5}{3}\right]\cup(9,\ 25)$）

5. 可以判断真假的语句叫做命题，逻辑连接词有“或”（$\vee$），“且”（$\wedge$）和“非”（$\neg$）.

若$p\wedge q$为真，当且仅当<u>p、q均为真</u>

若$p\vee q$为真，当且仅当<u>p、q至少有一个为真</u>

若$\neg p$为真，当且仅当p为假

6. 命题的四种形式及其相互关系是什么？

（互为逆否关系的命题是等价命题。）

原命题与逆否命题同真、同假；逆命题与否命题同真同假。

7. 对映射的概念了解吗？映射 f：A→B，是否注意到 A 中元素的任意性和 B 中与之对应元素的唯一性，哪几种对应能构成映射？

（一对一，多对一，允许 B 中有元素无原象。）

8. 函数的三要素是什么？如何比较两个函数是否相同？

（定义域、对应法则、值域）

9. 求函数的定义域有哪些常见类型？

例：函数 $y=\dfrac{\sqrt{x(4-x)}}{\lg(x-3)^2}$ 的定义域是_____

（答：$(0，2)\cup(2，3)\cup(3，4)$）

10. 如何求复合函数的定义域？

如：函数$f(x)$的定义域是$[a，b]$，$b>-a>0$，则函数$F(x)=f(x)+f(-x)$的定义域是_____。

（答：$[a，-a]$）

11. 求一个函数的解析式或一个函数的反函数时，注明函数的定义域了吗？

如：$f(\sqrt{x+1})=e^x+x$，求$f(x)$.

令$t=\sqrt{x+1}$，则$t\geq 0$

$\therefore x=t^2-1$

$\therefore f(t)=e^{t^2-1}+t^2-1$

$\therefore f(x)=e^{x^2-1}+x^2-1\ (x\geq 0)$

12. 反函数存在的条件是什么？

（一一对应函数）

求反函数的步骤掌握了吗？

（①反解 x；②互换 x、y；③注明定义域）

如：求函数 $f(x)=\begin{cases}1+x & (x\geq 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$ 的反函数

（答：$f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1 & (x>1)\\ -\sqrt{-x} & (x<0)\end{cases}$）

13. 反函数的性质有哪些？

① 互为反函数的图象关于直线 y＝x 对称；
② 保存了原来函数的单调性、奇函数性；

③设$y=f(x)$的定义域为A，值域为C，$a\in A$，$b\in C$，则$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$\therefore f^{-1}\left[f(a)\right]=f^{-1}(b)=a$，$f\left[f^{-1}(b)\right]=f(a)=b$

14. 如何用定义证明函数的单调性？
（取值、作差、判正负）
如何判断复合函数的单调性？

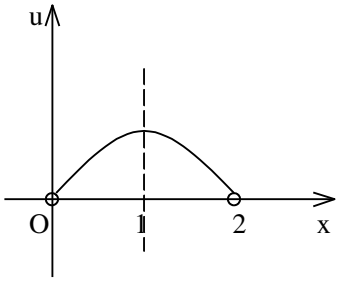
（$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则$y=f\left[\varphi(x)\right]$
（外层）　（内层）

当内、外层函数单调性相同时$f\left[\varphi(x)\right]$为增函数，否则$f\left[\varphi(x)\right]$为减函数。）

如：求$y=\log_{\frac{1}{2}}\left(-x^2+2x\right)$的单调区间

（设$u=-x^2+2x$，由$u>0$则$0<x<2$

且$\log_{\frac{1}{2}}u\downarrow$，$u=-(x-1)^2+1$，如图：



当$x\in(0，1]$时，$u\uparrow$，又$\log_{\frac{1}{2}}u\downarrow$，$\therefore y\downarrow$

当$x\in[1，2)$时，$u\downarrow$，又$\log_{\frac{1}{2}}u\downarrow$，$\therefore y\uparrow$

∴¼ ¼ ）

15. 如何利用导数判断函数的单调性？

在区间$(a，b)$内，若总有$f'(x)\geq 0$则$f(x)$为增函数。（在个别点上导数等于零，不影响函数的单调性），反之也对，若$f'(x)\leq 0$呢？

如：已知$a>0$，函数$f(x)=x^3-ax$在$\left[1，+\infty\right)$上是单调增函数，则a的最大值是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

（令$f'(x)=3x^2-a=3\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\geq 0$

则$x\leq-\sqrt{\frac{a}{3}}$或$x\geq\sqrt{\frac{a}{3}}$

由已知$f(x)$在$[1,\ +\infty)$上为增函数，则$\sqrt{\frac{a}{3}}\leq 1$，即$a\leq 3$

∴a 的最大值为 3）

16. 函数 f(x)具有奇偶性的必要（非充分）条件是什么？

（f(x)定义域关于原点对称）

若$f(-x)=-f(x)$总成立 ⇔ $f(x)$为奇函数 ⇔ 函数图象关于原点对称

若$f(-x)=f(x)$总成立 ⇔ $f(x)$为偶函数 ⇔ 函数图象关于y轴对称

注意如下结论：

（1）在公共定义域内：两个奇函数的乘积是偶函数；两个偶函数的乘积是偶函数；一个偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

（2）若f(x)是奇函数且定义域中有原点，则$f(0)=0$。

如：若$f(x)=\frac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}$为奇函数，则实数$a=$_____

（∵$f(x)$为奇函数，$x\in R$，又$0\in R$，∴$f(0)=0$

即$\frac{a\cdot 2^0+a-2}{2^0+1}=0$，∴$a=1$）

又如：$f(x)$为定义在$(-1,\ 1)$上的奇函数，当$x\in(0,\ 1)$时，$f(x)=\frac{2^x}{4^x+1}$，

求$f(x)$在$(-1,\ 1)$上的解析式。

（令$x\in(-1,\ 0)$，则$-x\in(0,\ 1)$，$f(-x)=\frac{2^{-x}}{4^{-x}+1}$

又$f(x)$为奇函数，∴$f(x)=-\frac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=-\frac{2^x}{1+4^x}$

又$f(0)=0$，$\therefore f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2^x}{4^x+1} & x\in(-1,0) \\ x=0 \\ \dfrac{2^x}{4^x+1} & x\in(0,1) \end{cases}$）

17. 你熟悉周期函数的定义吗？

（若存在实数T（$T\neq 0$），在定义域内总有$f(x+T)=f(x)$，则$f(x)$为周期函数，T是一个周期。）

如：若$f(x+a)=-f(x)$，则_____

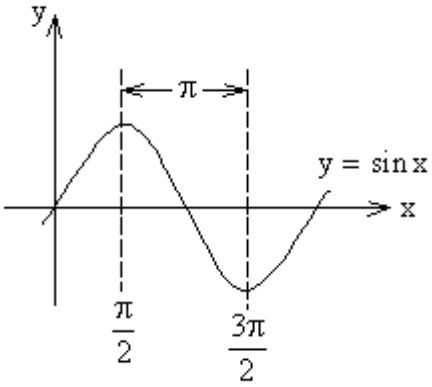
（答：$f(x)$是周期函数，$T=2a$为$f(x)$的一个周期）

又如：若$f(x)$图象有两条对称轴$x=a$，$x=b$（$\Leftrightarrow$）

即$f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$

则$f(x)$是周期函数，$2|a-b|$为一个周期

如：



18. 你掌握常用的图象变换了吗？

$f(x)$与$f(-x)$的图象关于 y轴 对称

$f(x)$与$-f(x)$的图象关于 x轴 对称

$f(x)$与$-f(-x)$的图象关于 原点 对称

$f(x)$与$f^{-1}(x)$的图象关于 直线$y=x$ 对称

$f(x)$与$f(2a-x)$的图象关于 直线$x=a$ 对称

$f(x)$与$-f(2a-x)$的图象关于 点$(a,0)$ 对称

将$y=f(x)$图象 $\xrightarrow[\text{右移}a(a>0)\text{个单位}]{\text{左移}a(a>0)\text{个单位}}$ $y=f(x+a)$ / $y=f(x-a)$

$\xrightarrow[\text{下移}b(b>0)\text{个单位}]{\text{上移}b(b>0)\text{个单位}}$ $y=f(x+a)+b$ / $y=f(x+a)-b$

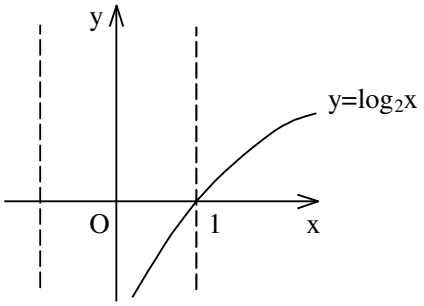
注意如下“翻折”变换：

$f(x)\longrightarrow|f(x)|$

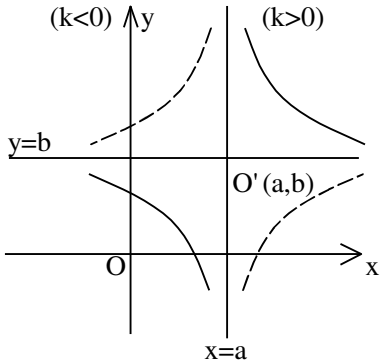
$f(x)\longrightarrow f(|x|)$

如：$f(x)=\log_2(x+1)$

作出$y=|\log_2(x+1)|$及$y=\log_2|x+1|$的图象



19. 你熟练掌握常用函数的图象和性质了吗？



（1）一次函数：$y=kx+b\ (k\neq0)$

（2）反比例函数：$y=\frac{k}{x}\ (k\neq0)$推广为$y=b+\frac{k}{x-a}\ (k\neq0)$是中心O'(a，b)的双曲线。

（3）二次函数$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$图象为抛物线

顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴$x=-\frac{b}{2a}$

开口方向：$a>0$，向上，函数$y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

$a<0$，向下，$y_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

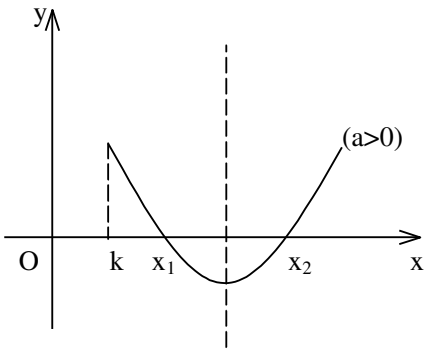
应用：①“三个二次”（二次函数、二次方程、二次不等式）的关系——二次方程$ax^2+bx+c=0$，$\Delta>0$时，两根x_1、x_2为二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象与x轴的两个交点，也是二次不等式$ax^2+bx+c>0\ (<0)$解集的端点值。

② 求闭区间［m，n］上的最值。

③ 求区间定（动），对称轴动（定）的最值问题。

④ 一元二次方程根的分布问题。

如：二次方程$ax^2+bx+c=0$的两根都大于k $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{2a}>k \\ f(k)>0 \end{cases}$

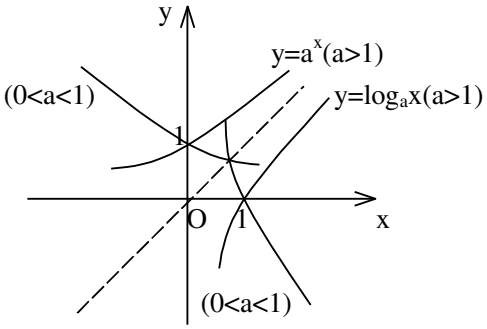


一根大于k，一根小于k $\Leftrightarrow f(k)<0$

（4）指数函数：$y=a^x\ (a>0，a\neq 1)$

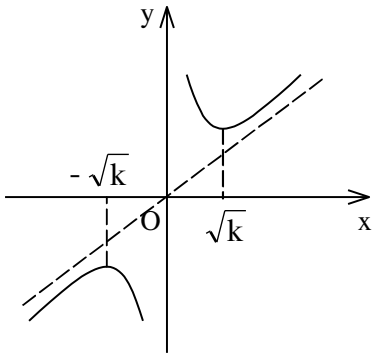
（5）对数函数$y=\log_a x\ (a>0，a\neq 1)$

由图象记性质！　　（注意底数的限定！）



（6）“对勾函数” $y=x+\frac{k}{x}(k>0)$

利用它的单调性求最值与利用均值不等式求最值的区别是什么？



20. 你在基本运算上常出现错误吗？

指数运算：$a^0=1(a\neq 0)$，$a^{-p}=\frac{1}{a^p}(a\neq 0)$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a\geq 0)$，$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0)$

对数运算：$\log_a M\cdot N=\log_a M+\log_a N(M>0，N>0)$

$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$，$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$

对数恒等式：$a^{\log_a x}=x$

对数换底公式：$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\Rightarrow\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

21. 如何解抽象函数问题？

（赋值法、结构变换法）

如：（1）$x\in R$，$f(x)$满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明$f(x)$为奇函数。

（先令$x=y=0\Rightarrow f(0)=0$再令$y=-x$，……）

（2）$x\in R$，$f(x)$满足$f(xy)=f(x)+f(y)$，证明$f(x)$是偶函数。

（先令$x=y=-t\Rightarrow f\left[(-t)(-t)\right]=f(t\cdot t)$

$\therefore f(-t)+f(-t)=f(t)+f(t)$

$\therefore f(-t)=f(t)$……）

（3）证明单调性：$f(x_2)=f\left[(x_2-x_1)+x_2\right]=$……

22. 掌握求函数值域的常用方法了吗？

（二次函数法（配方法），反函数法，换元法，均值定理法，判别式法，利用函数单调性法，导数法等。）

如求下列函数的最值：

（1）$y=2x-3+\sqrt{13-4x}$

（2）$y=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$

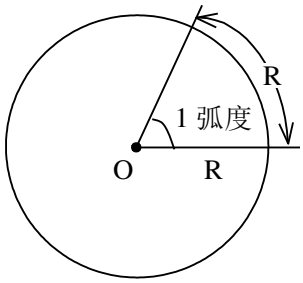
（3）$x>3$，$y=\dfrac{2x^2}{x-3}$

（4）$y=x+4+\sqrt{9-x^2}$ $\left(设x=3\cos\theta，\theta\in\left[0，\pi\right]\right)$

（5）$y=4x+\dfrac{9}{x}$，$x\in(0，1]$

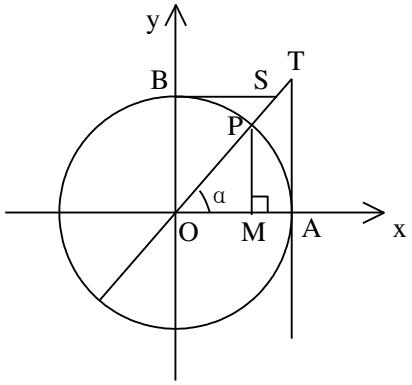
23. 你记得弧度的定义吗？能写出圆心角为α，半径为R的弧长公式和扇形面积公式吗？

（$l=|\alpha|\cdot R$，$S_{扇}=\dfrac{1}{2}l\cdot R=\dfrac{1}{2}|\alpha|\cdot R^2$）



24. 熟记三角函数的定义，单位圆中三角函数线的定义

$\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$，$\tan\alpha=AT$

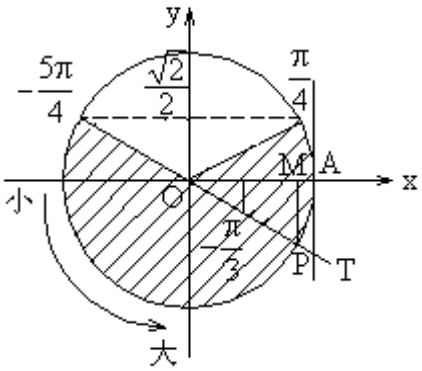


如：若 $-\frac{\pi}{8}<\theta<0$，则 $\sin\theta$， $\cos\theta$， $\tan\theta$的大小顺序是_____

又如：求函数$y=\sqrt{1-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$的定义域和值域。

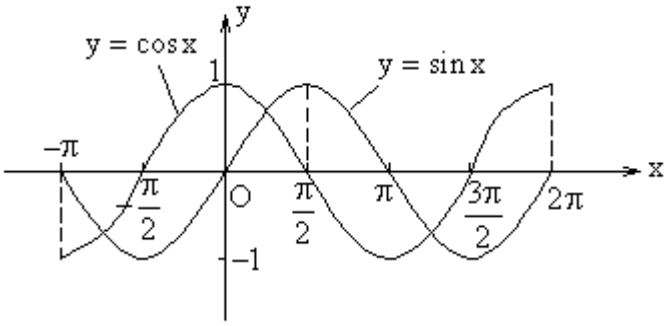
（$\because 1-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$） $=1-\sqrt{2}\sin x\geq 0$

$\therefore \sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$，如图：

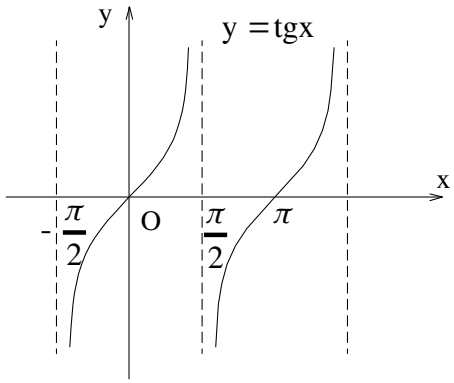


$\therefore 2k\pi-\frac{5\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$，$0\leq y\leq\sqrt{1+\sqrt{2}}$

25. 你能迅速画出正弦、余弦、正切函数的图象吗？并由图象写出单调区间、对称点、对称轴吗？



$|\sin x| \le 1$，$|\cos x| \le 1$



对称点为$\left(k\frac{\pi}{2}，0\right)$，$k \in Z$

$y = \sin x$的增区间为$\underline{\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}，2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)(k \in Z)}$

减区间为$\underline{\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}，2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)(k \in Z)}$

图象的对称点为$\underline{(k\pi，0)}$，对称轴为$\underline{x = k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in Z)}$

$y = \cos x$的增区间为$\underline{[2k\pi，2k\pi + \pi](k \in Z)}$

减区间为$\underline{[2k\pi + \pi，2k\pi + 2\pi](k \in Z)}$

图象的对称点为$\underline{\left(k\pi + \frac{\pi}{2}，0\right)}$，对称轴为$\underline{x = k\pi(k \in Z)}$

$y = \tan x$的增区间为$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}，k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ $k \in Z$

26. 正弦型函数$y = A\sin(\omega x + \varphi)$的图象和性质要熟记。$[或y = A\cos(\omega x + \varphi)]$

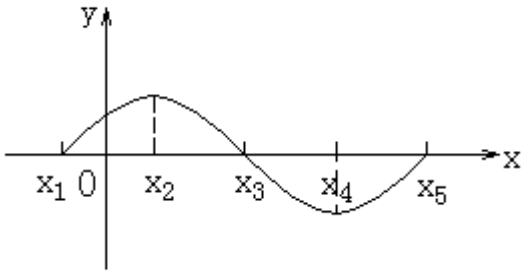
（1）振幅$|A|$，周期$T = \frac{2\pi}{|\omega|}$

若$f(x_0) = \pm A$，则$x = x_0$为对称轴。

若$f(x_0) = 0$，则$(x_0，0)$为对称点，反之也对。

（2）五点作图：令 $\omega x+\varphi$ 依次为 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π，求出x与y，依点（x，y）作图象。

（3）根据图象求解析式。（求A、ω、φ值）



如图列出 $\begin{cases}\omega(x_1)+\varphi=0\\ \omega(x_2)+\varphi=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

解条件组求ω、φ值

Δ正切型函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$，$T=\frac{\pi}{|\omega|}$

27. 在三角函数中求一个角时要注意两个方面——先求出某一个三角函数值，再判定角的范围。

如：$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$，求x值。

（$\because \pi<x<\frac{3\pi}{2}$，$\therefore \frac{7\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{3}$，$\therefore x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{4}$，$\therefore x=\frac{13}{12}\pi$）

28. 在解含有正、余弦函数的问题时，你注意（到）运用函数的有界性了吗？

如：函数 $y=\sin x+\sin|x|$ 的值域是_____

（$x\geq 0$时，$y=2\sin x\in[-2,\ 2]$，$x<0$时，$y=0$，$\therefore y\in[-2,\ 2]$）

29. 熟练掌握三角函数图象变换了吗？

（平移变换、伸缩变换）

平移公式：

（1）点P（x，y）$\xrightarrow[\text{平移至}]{\vec{a}=(h,\ k)}$ P©（x©，y©），则 $\begin{cases}x©=x+h\\ y©=y+k\end{cases}$

（2）曲线 $f(x,\ y)=0$ 沿向量 $\vec{a}=(h,\ k)$ 平移后的方程为 $f(x-h,\ y-k)=0$

如：函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 的图象经过怎样的变换才能得到 $y=\sin x$ 的图象？

（$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1\xrightarrow{\text{横坐标伸长到原来的2倍}}y=2\sin\left(2\cdot\frac{1}{2}x\right)-\frac{\pi}{4}\Big)-1$

$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\xrightarrow{\text{左平移}\frac{\pi}{4}\text{个单位}}y=2\sin x-1\xrightarrow{\text{上平移1个单位}}y=2\sin x$

$\xrightarrow{\text{纵坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}\text{倍}}y=\sin x$）

30. 熟练掌握同角三角函数关系和诱导公式了吗？

如：$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\cos\alpha\cdot\sec\alpha=\tan\frac{\pi}{4}$

$=\sin\frac{\pi}{2}=\cos 0=$……称为1的代换。

“$k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$”化为 α 的三角函数——“奇变，偶不变，符号看象限”，

ª奇”、“偶”指 k 取奇、偶数。

如：$\cos\frac{9\pi}{4}+\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+\sin(21\pi)=$_____

又如：函数 $y=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$，则y的值为_____

A. 正值或负值　　B. 负值　　C. 非负值　　D. 正值

（$y=\frac{\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}>0$，$\because\alpha\neq 0$）

31. 熟练掌握两角和、差、倍、**降幂公式**及其逆向应用了吗？

理解公式之间的联系：

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\xrightarrow{\text{令}\alpha=\beta}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \xrightarrow{\text{令}\alpha=\beta} \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\downarrow$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\Rightarrow$$

$$\downarrow$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$$

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),\quad \tan\varphi=\frac{b}{a}$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$

应用以上公式对三角函数式化简。（化简要求：项数最少、函数种类最少，分母中不含三角函数，能求值，尽可能求值。）

具体方法：

（1）角的变换：如$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，$\frac{\alpha+\beta}{2}=\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$……

（2）名的变换：化弦或化切

（3）次数的变换：升、降幂公式

（4）形的变换：统一函数形式，注意运用代数运算。

如：已知$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos2\alpha}=1$，$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{2}{3}$，求$\tan(\beta-2\alpha)$的值。

（由已知得：$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}=1$，$\therefore\tan\alpha=\frac{1}{2}$

又$\tan(\beta-\alpha)=\frac{2}{3}$

$$\therefore\tan(\beta-2\alpha)=\tan\left[(\beta-\alpha)-\alpha\right]=\frac{\tan(\beta-\alpha)-\tan\alpha}{1+\tan(\beta-\alpha)\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$$ ）

32. 正、余弦定理的各种表达形式你还记得吗？如何实现边、角转化，而解斜三角形？

余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

（应用：已知两边一夹角求第三边；已知三边求角。）

正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \Leftrightarrow \begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$

$S_{\triangle}=\frac{1}{2}a\cdot b\sin C$

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore A+B=\pi-C$

$\therefore \sin(A+B)=\sin C$，$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

如ΔABC中，$2\sin^2\frac{A+B}{2}+\cos 2C=1$

（1）求角C；

（2）若$a^2=b^2+\frac{c^2}{2}$，求$\cos 2A-\cos 2B$的值。

（（1）由已知式得：$1-\cos(A+B)+2\cos^2 C-1=1$

又$A+B=\pi-C$，$\therefore 2\cos^2 C+\cos C-1=0$

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$或$\cos C=-1$（舍）

又$0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$

（2）由正弦定理及$a^2=b^2+\frac{1}{2}c^2$得：

$2\sin^2 A-2\sin^2 B=\sin^2 C=\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$

$1-\cos 2A-1+\cos 2B=\frac{3}{4}$

$\therefore \cos 2A-\cos 2B=-\frac{3}{4}$）

33. 用反三角函数表示角时要注意角的范围。

反正弦：$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$x\in[-1,\ 1]$

反余弦：$\arccos x\in[0,\ \pi]$，$x\in[-1,\ 1]$

反正切：$\arctan x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，$(x\in R)$

34. 不等式的性质有哪些？

（1）$a>b$，$\begin{matrix} c>0\Rightarrow ac>bc \\ c<0\Rightarrow ac<bc \end{matrix}$

（2）$a>b$，$c>d\Rightarrow a+c>b+d$

（3）$a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow ac>bd$

（4）$a>b>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，$a<b<0\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

（5）$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

（6）$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$，$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$或$x>a$

如：若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列结论不正确的是（　　）

A. $a^2<b^2$　　B. $ab<b^2$

C. $|a|+|b|>|a+b|$　　D. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$

答案：C

35. 利用均值不等式：

$a^2+b^2\geq 2ab\left(a，b\in R^+\right)$；$a+b\geq 2\sqrt{ab}$；$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$求最值时，你是否注意到“$a，b\in R^+$”且“等号成立”时的条件，积(ab)或和(a+b)其中之一为定值？（一正、二定、三相等）

注意如下结论：

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}\left(a，b\in R_+\right)$$

当且仅当$a=b$时等号成立。

$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\left(a，b\in R\right)$

当且仅当$a=b=c$时取等号。

$a>b>0$，$m>0$，$n>0$，则

$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$

如：若$x>0$，$2-3x-\frac{4}{x}$的最大值为_____

（设$y=2-\left[3x+\frac{4}{x}\right]\le 2-2\sqrt{12}=2-4\sqrt{3}$

当且仅当$3x=\frac{4}{x}$，又$x>0$，$\therefore x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，$y_{max}=2-4\sqrt{3}$）

又如：$x+2y=1$，则2^x+4^y的最小值为_____

（$\because 2^x+2^{2y}\ge 2\sqrt{2^{x+2y}}=2\sqrt{2^1}$，$\therefore$最小值为$2\sqrt{2}$）

36. 不等式证明的基本方法都掌握了吗？

（比较法、分析法、综合法、数学归纳法等）

并注意简单放缩法的应用。

如：证明$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$

（$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$

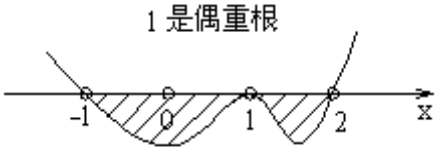
$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$=2-\frac{1}{n}<2$）

37. 解分式不等式$\frac{f(x)}{g(x)}>a\ (a\ne 0)$的一般步骤是什么？

（移项通分，分子分母因式分解，x 的系数变为 1，穿轴法解得结果。）

38. 用“穿轴法”解高次不等式——“奇穿，偶切”，从最大根的右上方开始



如：$(x+1)(x-1)^2(x-2)^3<0$

39. 解含有参数的不等式要注意对字母参数的讨论

如：对数或指数的底分$a>1$或$0<a<1$讨论

40. 对含有两个绝对值的不等式如何去解？

（找零点，分段讨论，去掉绝对值符号，最后取各段的并集。）

例如：解不等式$|x-3|-|x+1|<1$

（解集为$\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$）

41. 会用不等式$|a|-|b| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$证明较简单的不等问题

如：设$f(x)=x^2-x+13$，实数a满足$|x-a|<1$

求证：$|f(x)-f(a)|<2(|a|+1)$

证明：$|f(x)-f(a)|=|(x^2-x+13)-(a^2-a+13)|$

$=|(x-a)(x+a-1)|$（$\because |x-a|<1$）

$=|x-a||x+a-1| \le |x+a-1|$

$\le |x|+|a|+1$

又$|x|-|a| \le |x-a|<1$，$\therefore |x|<|a|+1$

$\therefore |f(x)-f(a)|<2|a|+2=2(|a|+1)$

（按不等号方向放缩）

42. 不等式恒成立问题，常用的处理方式是什么？（可转化为最值问题，或“△”问题）

如：$a<f(x)$恒成立 $\Leftrightarrow$ $a<f(x)$的最小值

$a>f(x)$恒成立 $\Leftrightarrow$ $a>f(x)$的最大值

$a>f(x)$能成立 $\Leftrightarrow$ $a>f(x)$的最小值

例如：对于一切实数x，若$|x-3|+|x+2|>a$恒成立，则a的取值范围是____

（设$u=|x-3|+|x+2|$，它表示数轴上到两定点-2和3距离之和

$u_{min}=3-(-2)=5$，$\therefore 5>a$，即$a<5$

或者：$|x-3|+|x+2| \ge |(x-3)-(x+2)|=5$，$\therefore a<5$）

43. 等差数列的定义与性质

定义：$a_{n+1}-a_n=d$ (d为常数)，$a_n=a_1+(n-1)d$

等差中项：x，A，y成等差数列 $\Leftrightarrow$ $2A=x+y$

前n项和$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

性质：$\{a_n\}$是等差数列

（1）若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$；

（2）数列$\{a_{2n-1}\}$，$\{a_{2n}\}$，$\{ka_n+b\}$仍为等差数列；

S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$……仍为等差数列；

（3）若三个数成等差数列，可设为$a-d$，a，$a+d$；

（4）若a_n，b_n是等差数列S_n，T_n为前n项和，则$\frac{a_m}{b_m}=\frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$；

（5）$\{a_n\}$为等差数列$\Leftrightarrow S_n=an^2+bn$（a，b为常数，是关于n的常数项为0的二次函数）

S_n的最值可求二次函数$S_n=an^2+bn$的最值；或者求出$\{a_n\}$中的正、负分界项，即：

当$a_1>0$，$d<0$，解不等式组$\begin{cases}a_n\geq 0\\a_{n+1}\leq 0\end{cases}$可得$S_n$达到最大值时的n值。

当$a_1<0$，$d>0$，由$\begin{cases}a_n\leq 0\\a_{n+1}\geq 0\end{cases}$可得$S_n$达到最小值时的n值。

如：等差数列$\{a_n\}$，$S_n=18$，$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=3$，$S_3=1$，则$n=$_____

（由$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=3\Rightarrow 3a_{n-1}=3$，$\therefore a_{n-1}=1$

又$S_3=\frac{(a_1+a_3)}{2}\cdot 3=3a_2=1$，$\therefore a_2=\frac{1}{3}$

$$\therefore S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(a_2+a_{n-1})\cdot n}{2}=\frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)n}{2}=18$$

$\therefore n=27$）

44. 等比数列的定义与性质

定义：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$（q为常数，$q\neq 0$），$a_n=a_1q^{n-1}$

等比中项：x、G、y成等比数列$\Rightarrow G^2=xy$，或$G=\pm\sqrt{xy}$

前n项和：$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1) \end{cases}$ （要注意！）

性质：$\{a_n\}$是等比数列

（1）若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$

（2）S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$……仍为等比数列

45. 由S_n求a_n时应注意什么？

（$n=1$时，$a_1=S_1$，$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$）

46. 你熟悉求数列通项公式的常用方法吗？

例如：（1）求差（商）法

如：$\{a_n\}$满足$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}a_n=2n+5$ <1>

解： $n=1$时，$\frac{1}{2}a_1=2\times 1+5$，$\therefore a_1=14$

$n\geq 2$时，$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1}=2n-1+5$ <2>

<1>-<2>得：$\frac{1}{2^n}a_n=2$

$\therefore a_n=2^{n+1}$

$\therefore a_n=\begin{cases} 14 & (n=1) \\ 2^{n+1} & (n\geq 2) \end{cases}$

[练习]

数列$\{a_n\}$满足$S_n+S_{n+1}=\frac{5}{3}a_{n+1}$，$a_1=4$，求$a_n$

（注意到$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$代入得：$\frac{S_{n+1}}{S_n}=4$

又$S_1=4$，$\therefore\{S_n\}$是等比数列，$S_n=4^n$

$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\cdots\cdots=3\cdot 4^{n-1}$

（2）叠乘法

例如：数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$，求$a_n$

解： $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}$，$\therefore\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{n}$

又$a_1=3$，$\therefore a_n=\frac{3}{n}$

（3）等差型递推公式

由$a_n-a_{n-1}=f(n)$，$a_1=a_0$，求a_n，用迭加法

$n\geq 2$时，$\left.\begin{array}{l}a_2-a_1=f(2)\\a_3-a_2=f(3)\\\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\a_n-a_{n-1}=f(n)\end{array}\right\}$两边相加，得：

$a_n-a_1=f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n)$

$\therefore a_n=a_0+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n)$

[练习]

数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_n=3^{n-1}+a_{n-1}(n\geq 2)$，求$a_n$

（$a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$）

（4）等比型递推公式

$a_n=ca_{n-1}+d$（c、d为常数，$c\neq 0$，$c\neq 1$，$d\neq 0$）

可转化为等比数列，设$a_n+x=c(a_{n-1}+x)$

$\Rightarrow a_n=ca_{n-1}+(c-1)x$

令$(c-1)x=d$，$\therefore x=\frac{d}{c-1}$

$\therefore\left\{a_n+\frac{d}{c-1}\right\}$是首项为$a_1+\frac{d}{c-1}$，c为公比的等比数列

$\therefore a_n+\frac{d}{c-1}=\left(a_1+\frac{d}{c-1}\right)\cdot c^{n-1}$

$\therefore a_n=\left(a_1+\frac{d}{c-1}\right)c^{n-1}-\frac{d}{c-1}$

[练习]

数列$\{a_n\}$满足$a_1=9$，$3a_{n+1}+a_n=4$，求a_n

（$a_n=8\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}+1$）

（5）倒数法

例如：$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，求$a_n$

由已知得：$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$

$\therefore \left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，$\frac{1}{a_1}=1$，公差为$\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(n+1)$

$\therefore a_n=\frac{2}{n+1}$

47. 你熟悉求数列前 n 项和的常用方法吗？

例如：（1）裂项法：把数列各项拆成两项或多项之和，使之出现成对互为相反数的项。

如：$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，求$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$

解： 由$\frac{1}{a_k\cdot a_{k+1}}=\frac{1}{a_k(a_k+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)(d\neq 0)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

[练习]

求和：$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}$

（$a_n=\cdots\cdots=\cdots\cdots$，$S_n=2-\frac{1}{n+1}$）

（2）错位相减法：

若$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，求数列$\{a_nb_n\}$（差比数列）前n项和，可由$S_n - qS_n$求S_n，其中q为$\{b_n\}$的公比。

如：$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots + nx^{n-1}$ <1>

$x \cdot S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots\cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$ <2>

<1> - <2>：$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} - nx^n$

$x \neq 1$时，$S_n = \dfrac{(1-x^n)}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^n}{1-x}$

$x = 1$时，$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

（3）倒序相加法：把数列的各项顺序倒写，再与原来顺序的数列相加。

$$\left.\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots\cdots + a_2 + a_1 \end{array}\right\} \text{相加}$$

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots\cdots + (a_1 + a_n)\cdots\cdots$

［练习］

已知$f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$，则$f(1) + f(2) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f(3) + f\left(\dfrac{1}{3}\right) + f(4) + f\left(\dfrac{1}{4}\right) =$_____

（由$f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+x^2} = 1$

$\therefore$原式$= f(1) + \left[f(2) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right] + \left[f(3) + f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right] + \left[f(4) + f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right]$

$= \dfrac{1}{2} + 1 + 1 + 1 = 3\dfrac{1}{2}$）

48. 你知道储蓄、贷款问题吗？

△零存整取储蓄（单利）本利和计算模型：

若每期存入本金p元，每期利率为r，n期后，本利和为：

$S_n = p(1+r) + p(1+2r) + \cdots\cdots + p(1+nr) = p\left[n + \dfrac{n(n+1)}{2}r\right]$……等差问题

△若按复利，如贷款问题——按揭贷款的每期还款计算模型（按揭贷款——分期等额归还本息的借款种类）

若贷款（向银行借款）p 元，采用分期等额还款方式，从借款日算起，一期（如一年）后为第一次还款日，如此下去，第 n 次还清。如果每期利率为 r（按复利），那么每期应还 x 元，满足

$$p(1+r)^n = x(1+r)^{n-1} + x(1+r)^{n-2} + \cdots\cdots + x(1+r) + x$$

$$= x\left[\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}\right] = x\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\therefore x = \frac{pr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

pÐ Ð 贷款数，rÐ Ð 利率，nÐ Ð 还款期数

49. 解排列、组合问题的依据是：分类相加，分步相乘，有序排列，无序组合。

（1）分类计数原理：$N = m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_n$

（m_i为各类办法中的方法数）

分步计数原理：$N = m_1 \cdot m_2 \cdots\cdots m_n$

（m_i为各步骤中的方法数）

（2）排列：从 n 个不同元素中，任取 m（m≤n）个元素，按照一定的**顺序**排成一列，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列，所有排列的个数记为A_n^m.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}(m \le n)$$

规定：$0! = 1$

（3）组合：从 n 个不同元素中任取 m（m≤n）个元素并组成一组，叫做从 n 个不同元素中取出m个元素的一个组合，所有组合个数记为C_n^m.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

规定：$C_n^0 = 1$

（4）组合数性质：

$C_n^m = C_n^{n-m}$，$C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$，$C_n^0 + C_n^1 + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$

50. 解排列与组合问题的规律是：

相邻问题捆绑法；相间隔问题插空法；定位问题优先法；多元问题分类法；至多至少问题间接法；相同元素分组可采用隔板法，数量不大时可以逐一排出结果。

如：学号为1，2，3，4的四名学生的考试成绩

$x_i \in \{89，90，91，92，93\}$，$(i=1，2，3，4)$且满足$x_1 < x_2 \le x_3 < x_4$，

则这四位同学考试成绩的所有可能情况是（　　）

A. 24　　B. 15　　C. 12　　D. 10

解析：可分成两类：

（1）中间两个分数不相等，

$\square \quad \square \quad \square \quad \square$

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

有$C_5^4 = 5$（种）

（2）中间两个分数相等

$x_1 < x_2 = x_3 < x_4$

相同两数分别取90，91，92，对应的排列可以数出来，分别有3，4，3种，∴有10种。

∴共有5＋10＝15（种）情况

51. 二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n$$

二项展开式的通项公式：$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r \ (r=0，1\cdots\cdots n)$

C_n^r为二项式系数（区别于该项的系数）

性质：

（1）对称性：$C_n^r = C_n^{n-r} \left(r=0，1，2，\cdots\cdots，n\right)$

（2）系数和：$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$

（3）最值：n为偶数时，n＋1为奇数，中间一项的二项式系数最大且为第

$\left[\frac{n}{2}+1\right]$项，二项式系数为$C_n^{\frac{n}{2}}$；n为奇数时，$(n+1)$为偶数，中间两项的二项式

系数最大即第$\frac{n+1}{2}$项及第$\frac{n+1}{2}+1$项，其二项式系数为$C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$

如：在二项式$(x-1)^{11}$的展开式中，系数最小的项系数为_____（用数字表示）

（∵n＝11

∴共有12项，中间两项系数的绝对值最大，且为第$\frac{12}{2}=6$或第7项

由$C_{11}^{r}x^{11-r}(-1)^{r}$，∴取$r=5$即第6项系数为负值为最小：

$-C_{11}^{6}=-C_{11}^{5}=-426$

又如：$(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{2004}x^{2004}\ (x\in R)$，则

$(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\cdots\cdots+(a_0+a_{2004})=$_____（用数字作答）

（令$x=0$，得：$a_0=1$

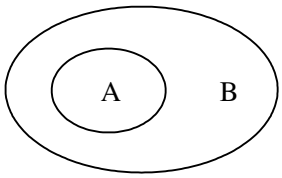
令$x=1$，得：$a_0+a_2+\cdots\cdots+a_{2004}=1$

∴原式$=2003a_0+(a_0+a_1+\cdots\cdots+a_{2004})=2003\times1+1=2004$）

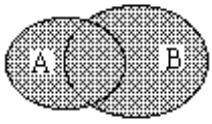
52. 你对随机事件之间的关系熟悉吗？

（1）必然事件Ω，$P(\Omega)=1$，不可能事件φ，$P(\phi)=0$

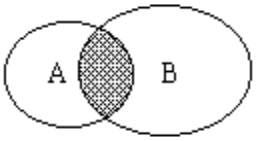
（2）包含关系：$A\subset B$，“A发生必导致B发生”称B包含A。



（3）事件的和（并）：A +B或A∪B“A与B至少有一个发生”叫做A与B的和（并）。

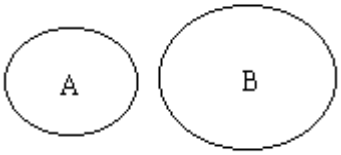


（4）事件的积（交）：A·B或A∩B“A与B同时发生”叫做A与B的积。



（5）互斥事件（互不相容事件）：“A 与 B 不能同时发生”叫做 A、B 互斥。

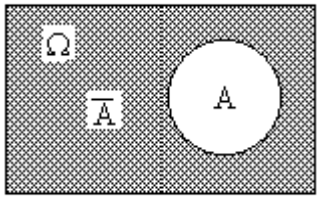
$A\cdot B=\phi$



（6）对立事件（互逆事件）：

“A不发生”叫做A发生的对立（逆）事件，$\overline{A}$

$A \cup \overline{A} = \Omega$，$A \cap \overline{A} = \phi$



（7）独立事件：A 发生与否对 B 发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件。

A与B独立，A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立。

53. 对某一事件概率的求法：

分清所求的是：（1）等可能事件的概率（常采用排列组合的方法，即

$$P(A) = \frac{\text{A包含的等可能结果}}{\text{一次试验的等可能结果的总数}} = \frac{m}{n}$$

（2）若A、B互斥，则$P(A+B) = P(A) + P(B)$

（3）若A、B相互独立，则$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

（4）$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

（5）如果在一次试验中 A 发生的概率是 p，那么在 n 次独立重复试验中 A 恰好发生 k次的概率：$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

如：设 10 件产品中有 4 件次品，6 件正品，求下列事件的概率。

（1）从中任取 2 件都是次品；

$$P_1 = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$$

（2）从中任取 5 件恰有 2 件次品；

$$P_2 = \frac{C_4^2 C_6^3}{C_{10}^5} = \frac{10}{21}$$

（3）从中有放回地任取 3 件至少有 2 件次品；

解析：有放回地抽取 3 次（每次抽 1 件），$\therefore n=10^3$

而至少有 2 件次品为“恰有 2 次品”和“三件都是次品”

$$\therefore m=C_3^2\cdot 4^2 6^1+4^3$$

$$\therefore P_3=\frac{C_3^2\cdot 4^2\cdot 6+4^3}{10^3}=\frac{44}{125}$$

（4）从中依次取 5 件恰有 2 件次品。

解析：∵一件一件抽取（有顺序）

$$\therefore n=A_{10}^5,\ m=C_4^2A_5^2A_6^3$$

$$\therefore P_4=\frac{C_4^2A_5^2A_6^3}{A_{10}^5}=\frac{10}{21}$$

分清（1）、（2）是组合问题，（3）是可重复排列问题，（4）是无重复排列问题。

54. 抽样方法主要有：简单随机抽样（抽签法、随机数表法）常常用于总体个数较少时，它的特征是从总体中逐个抽取；系统抽样，常用于总体个数较多时，它的主要特征是均衡成若干部分，每部分只取一个；分层抽样，主要特征是分层按比例抽样，主要用于总体中有明显差异，它们的共同特征是每个个体被抽到的概率相等，体现了抽样的客观性和平等性。

55. 对总体分布的估计——用样本的频率作为总体的概率，用样本的期望（平均值）和方差去估计总体的期望和方差。

要熟悉样本频率直方图的作法：

（1）算数据极差$(x_{max}-x_{min})$；

（2）决定组距和组数；

（3）决定分点；

（4）列频率分布表；

（5）画频率直方图。

$$\text{其中，频率}=\text{小长方形的面积}=\text{组距}\times\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$$

$$\text{样本平均值：}\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$$

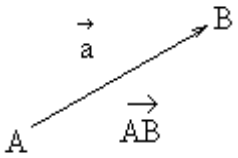
$$\text{样本方差：}S^2=\frac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\bar{x})^2\right]$$

如：从 10 名女生与 5 名男生中选 6 名学生参加比赛，如果按性别分层随机抽样，则组成此参赛队的概率为_____。

（$\frac{C_{10}^4C_5^2}{C_{15}^6}$）

56. 你对向量的有关概念清楚吗？

（1）向量——既有大小又有方向的量。



（2）向量的模——有向线段的长度，$|\vec{a}|$

（3）单位向量$|\vec{a}_0|=1$，$\vec{a}_0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

（4）零向量$\vec{0}$，$|\vec{0}|=0$

（5）相等的向量 $\Leftrightarrow \begin{cases}\text{长度相等}\\ \text{方向相同}\end{cases} \vec{a}=\vec{b}$

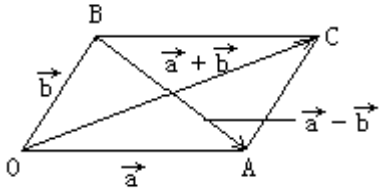
在此规定下向量可以在平面（或空间）平行移动而不改变。

（6）并线向量（平行向量）——方向相同或相反的向量。

规定零向量与任意向量平行。

$\vec{b} \parallel \vec{a}\ (\vec{b}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow$ 存在唯一实数λ，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$

（7）向量的加、减法如图：



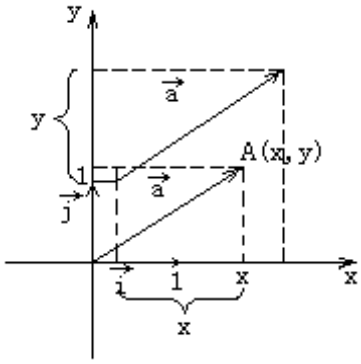
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

（8）平面向量基本定理（向量的分解定理）

$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$是平面内的两个不共线向量，$\vec{a}$为该平面任一向量，则存在唯一实数对λ_1、λ_2，使得$\vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$，$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。

（9）向量的坐标表示



$\vec{i}$，$\vec{j}$是一对互相垂直的单位向量，则有且只有一对实数x，y，使得

$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$，称(x，y)为向量$\vec{a}$的坐标，记作：$\vec{a}=(x，y)$，即为向量的坐标表示。

设$\vec{a}=(x_1，y_1)$，$\vec{b}=(x_2，y_2)$

则$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1，y_1)\pm(y_1，y_2)=(x_1\pm y_1，x_2\pm y_2)$

$\lambda\vec{a}=\lambda(x_1，y_1)=(\lambda x_1，\lambda y_1)$

若$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$

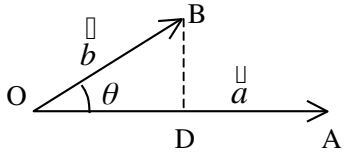
则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1，y_2-y_1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，A、B两点间距离公式

57. 平面向量的数量积

（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积（或内积）。

θ为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，$\theta\in[0，\pi]$



数量积的几何意义：

$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于$|\vec{a}|$与$\vec{b}$在$\vec{a}$的方向上的射影$|b|\cos\theta$的乘积。

（2）数量积的运算法则

①$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

②$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

③$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)=x_1x_2+y_1y_2$

注意：数量积不满足结合律$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

（3）重要性质：设$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$

①$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=0$

②$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$或$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

$\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$（$\vec{b}\neq0$，$\lambda$惟一确定）

$\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$

③$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2$，$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

④$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

［练习］

（1）已知正方形ABCD，边长为1，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，则$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=$_____

答案：$2\sqrt{2}$

（2）若向量$\vec{a}=(x,\ 1)$，$\vec{b}=(4,\ x)$，当$x=$____时$\vec{a}$与$\vec{b}$共线且方向相同

答案：2

（3）已知$\vec{a}$、$\vec{b}$均为单位向量，它们的夹角为60°，那么$|\vec{a}+3\vec{b}|=$_____

答案：$\sqrt{13}$

58. 线段的定比分点

设$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，分点$P(x,\ y)$，设P_1、P_2是直线l上两点，P点在l上且不同于P_1、P_2，若存在一实数λ，使$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则$\lambda$叫做P分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比（$\lambda>0$，P在线段$P_1P_2$内，$\lambda<0$，P在$P_1P_2$外），且

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$$，P为P_1P_2中点时，$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$

如：ΔABC，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$

则ΔABC重心G的坐标是$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

※. 你能分清三角形的重心、垂心、外心、内心及其性质吗？

59. 立体几何中平行、垂直关系证明的思路清楚吗？

平行垂直的证明主要利用线面关系的转化：

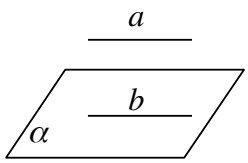
线∥线 ←→ 线∥面 ←→ 面∥面

$\xrightarrow{\text{判定}}$ 线⊥线 ←→ 线⊥面 ←→ 面⊥面 $\xleftarrow{\text{性质}}$

线∥线 ←→ 线⊥面 ←→ 面∥面

线面平行的判定：

$a \parallel b$，$b \subset$ 面α，$a \not\subset \alpha \Rightarrow a \parallel$ 面α



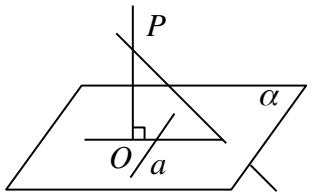
线面平行的性质：

$\alpha \parallel$ 面α，$\alpha \subset$ 面β，$\alpha \cap \beta = b \Rightarrow a \parallel b$

三垂线定理（及逆定理）：

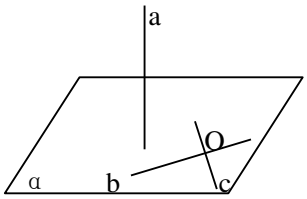
$PA \perp$ 面α，AO为PO在α内射影，$a \subset$ 面α，则

$a \perp OA \Rightarrow a \perp PO$；$a \perp PO \Rightarrow a \perp AO$



线面垂直：

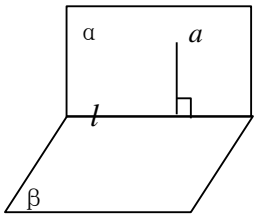
$a \perp b$，$a \perp c$，b，$c \subset \alpha$，$b \cap c = O \Rightarrow a \perp \alpha$



面面垂直：

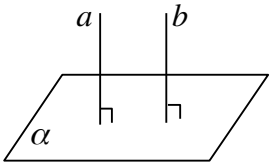
a⊥面α，a ⊂ 面β ⇒ β⊥α

面α⊥面β，α∩β =l，a ⊂ α，a⊥l ⇒ a⊥β



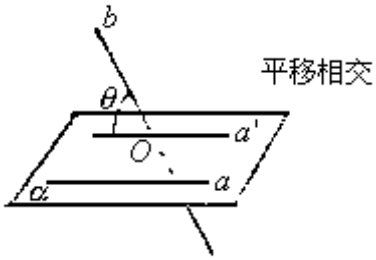
a⊥面α，b⊥面α ⇒ a∥b

面α⊥a，面β⊥a ⇒ α∥β



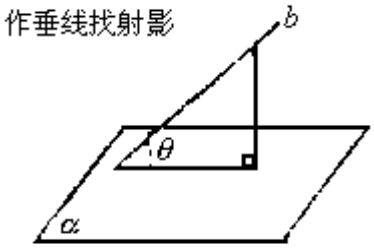
60. 三类角的定义及求法

（1）异面直线所成的角θ，0°＜θ≤90°



（2）直线与平面所成的角θ，0°≤θ≤90°

θ＝0° 时，b∥α或b ⊂ α



（3）二面角：二面角α - l - β的平面角θ，$0^{\circ} < \theta \le 180^{\circ}$

（定义法）

（三垂线定理法：A∈α 作或证 AB⊥β 于 B，作 BO⊥棱于 O，连 AO，则 AO⊥棱 l，∴∠AOB 为所求。）

三类角的求法：

① 找出或作出有关的角。

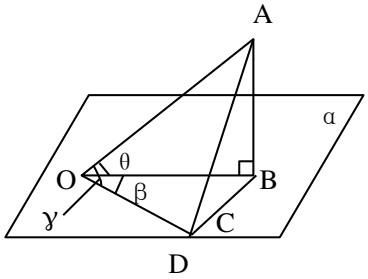
② 证明其符合定义，并指出所求作的角。

③ 计算大小（解直角三角形，或用余弦定理）。

［练习］

（1）如图，OA 为α的斜线 OB 为其在α内射影，OC 为α内过 O 点任一直线。

证明：$\cos\gamma = \cos\theta \cdot \cos\beta$



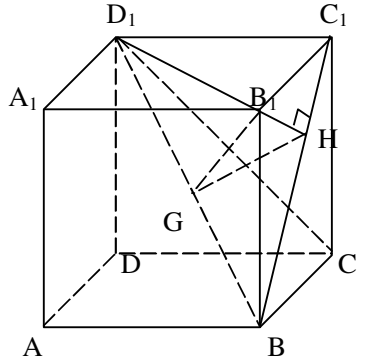
（θ为线面成角，∠AOC = γ，∠BOC = β）

（2）如图，正四棱柱 ABCDÐ $A_1B_1C_1D_1$ 中对角线 BD_1＝8，BD_1 与侧面 B_1BCC_1 所成的为 30°。

① 求 BD_1 和底面 ABCD 所成的角；

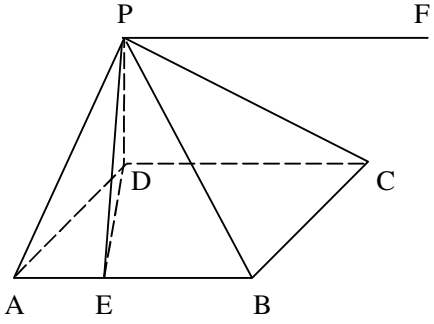
② 求异面直线 BD_1 和 AD 所成的角；

③ 求二面角 C_1Ð BD_1Ð B_1 的大小。



（① $\arcsin\frac{3}{4}$；② 60°；③ $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$）

（3）如图 ABCD 为菱形，∠DAB＝60°，PD⊥面 ABCD，且 PD＝AD，求面 PAB 与面 PCD 所成的锐二面角的大小。



（∵AB∥DC，P 为面 PAB 与面 PCD 的公共点，作 PF∥AB，则 PF 为面 PCD 与面 PAB 的交线……）

61. 空间有几种距离？如何求距离？

点与点，点与线，点与面，线与线，线与面，面与面间距离。

将空间距离转化为两点的距离，构造三角形，解三角形求线段的长（如：三垂线定理法，或者用等积转化法）。

如：正方形 ABCDÐ $A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 a，则：

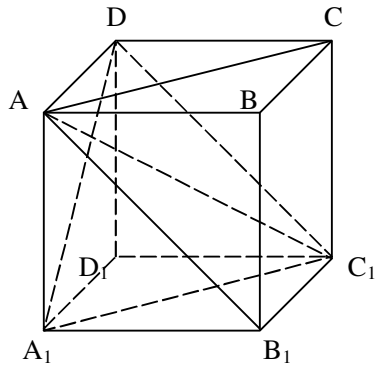
（1）点 C 到面 AB_1C_1 的距离为_____；

（2）点 B 到面 ACB_1 的距离为_____；

（3）直线 A_1D_1 到面 AB_1C_1 的距离为_____；

（4）面 AB_1C 与面 A_1DC_1 的距离为_____；

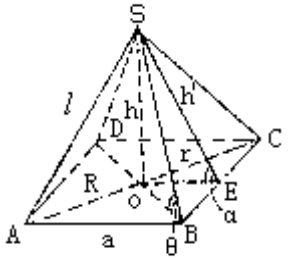
（5）点 B 到直线 A_1C_1 的距离为_____。



62. 你是否准确理解正棱柱、正棱锥的定义并掌握它们的性质？

正棱柱——底面为正多边形的直棱柱

正棱锥——底面是正多边形，顶点在底面的射影是底面的中心。



正棱锥的计算集中在四个直角三角形中：

Rt△SOB，Rt△SOE，Rt△BOE和Rt△SBE

它们各包含哪些元素？

$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}C\cdot h$©（C——底面周长，h©为斜高）

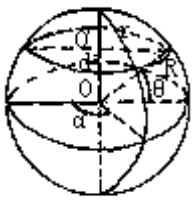
$V_{锥}=\frac{1}{3}$底面积×高

63. 球有哪些性质？

（1）球心和截面圆心的连线垂直于截面$r=\sqrt{R^2-d^2}$

（2）球面上两点的距离是经过这两点的大圆的劣弧长。为此，要找球心角！

（3）如图，θ为纬度角，它是线面成角；α为经度角，它是面面成角。



（4）$S_{球}=4\pi R^2$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

（5）球内接长方体的对角线是球的直径。正四面体的外接球半径R与内切球半径r之比为R：r＝3：1。

如：一正四面体的棱长均为$\sqrt{2}$，四个顶点都在同一球面上，则此球的表面积为（　　）

A. 3π　　B. 4π　　C. $3\sqrt{3}\pi$　　D. 6π

答案：A

64. 熟记下列公式了吗？

（1）l 直线的倾斜角$\alpha\in[0,\pi)$，$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2},\ x_1\neq x_2\right)$

$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$是l 上两点，直线l 的方向向量$\vec{a}=(1,k)$

（2）直线方程：

点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$（k存在）

斜截式：$y=kx+b$

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

一般式：$Ax+By+C=0$（A、B不同时为零）

（3）点$P(x_0,y_0)$到直线l：$Ax+By+C=0$的距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

（4）l_1到l_2的到角公式：$\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1-k_1k_2}$

l_1与l_2的夹角公式：$\tan\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1-k_1k_2}\right|$

65. 如何判断两直线平行、垂直？

$\left.\begin{array}{l}A_1B_2=A_2B_1\\A_1C_2\neq A_2C_1\end{array}\right\}\Leftrightarrow l_1/\!/l_2$

$k_1=k_2\Rightarrow l_1/\!/l_2$（反之不一定成立）

$A_1A_2+B_1B_2=0\Leftrightarrow l_1\perp l_2$

$k_1\cdot k_2=-1\Rightarrow l_1\perp l_2$

66. 怎样判断直线l与圆C的位置关系？

圆心到直线的距离与圆的半径比较。

直线与圆相交时，注意利用圆的“垂径定理”。

67. 怎样判断直线与圆锥曲线的位置？

联立方程组 ⇒ 关于x（或y）的一元二次方程 ⇒ “Δ”

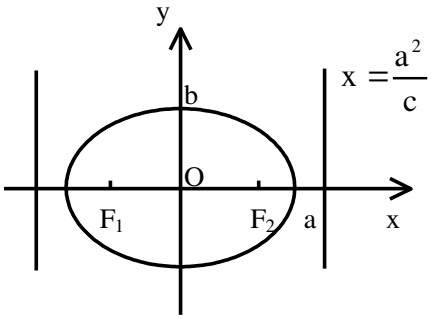
$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 相交；$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 相切；$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 相离

68. 分清圆锥曲线的定义

第一定义
- 椭圆 $\Leftrightarrow |PF_1| + |PF_2| = 2a$，$2a > 2c = |F_1F_2|$
- 双曲线 $\Leftrightarrow \big||PF_1| - |PF_2|\big| = 2a$，$2a < 2c = |F_1F_2|$
- 抛物线 $\Leftrightarrow |PF| = |PK|$

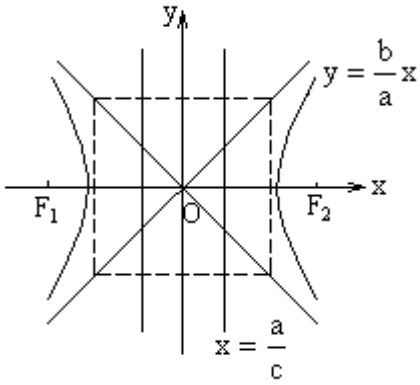
第二定义：$e = \dfrac{|PF|}{|PK|} = \dfrac{c}{a}$

$0 < e < 1 \Leftrightarrow$ 椭圆；$e > 1 \Leftrightarrow$ 双曲线；$e = 1 \Leftrightarrow$ 抛物线



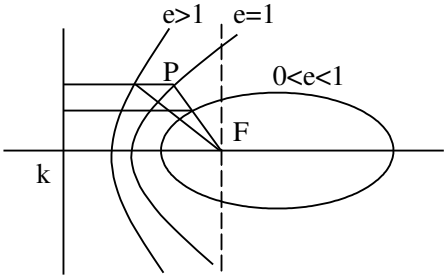
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(a > b > 0\right)$$

$$\left(a^2 = b^2 + c^2\right)$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(a > 0，b > 0\right)$$

$$\left(c^2 = a^2 + b^2\right)$$



69. 与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有相同焦点的双曲线系为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$

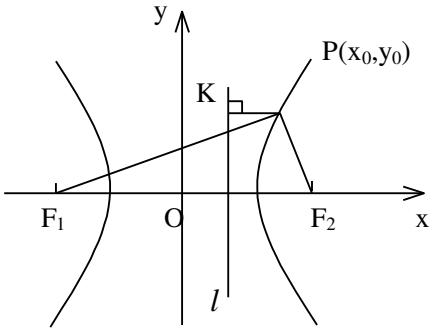
70. 在圆锥曲线与直线联立求解时，消元后得到的方程，要注意其二次项系数是否为零？△≥0 的限制。（求交点，弦长，中点，斜率，对称存在性问题都在△≥0 下进行。）

弦长公式$|P_1P_2|=\sqrt{(1+k^2)\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]}$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}$$

71. 会用定义求圆锥曲线的焦半径吗？

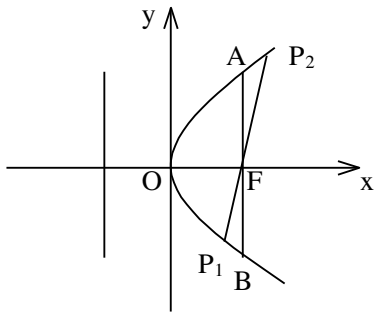
如：



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\frac{|PF_2|}{|PK|}=e$，$|PF_2|=e\left(x_0-\frac{a^2}{c}\right)=ex_0-a$

$|PF_1|=ex_0+a$



$y^2=2px(p>0)$

通径是抛物线的所有焦点弦中最短者；以焦点弦为直径的圆与准线相切。

72. 有关中点弦问题可考虑用“代点法”。

如：椭圆$mx^2+ny^2=1$与直线$y=1-x$交于M、N两点，原点与MN中点连线的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\frac{m}{n}$的值为_____

答案：$\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

73. 如何求解“对称”问题？

（1）证明曲线C：F（x，y）＝0关于点M（a，b）成中心对称，设A（x，y）为曲线C上任意一点，设$A'(x',y')$为A关于点M的对称点。

（由$a=\frac{x+x'}{2}$，$b=\frac{y+y'}{2}\Rightarrow x'=2a-x$，$y'=2b-y$）

只要证明$A'(2a-x,2b-y)$也在曲线C上，即$f(x',y')=y'$

（2）点A、A'关于直线l对称 $\Leftrightarrow\begin{cases}AA'\perp l\\ AA'\text{中点在}l\text{上}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k_{AA'}\cdot k_l=-1\\ AA'\text{中点坐标满足}l\text{方程}\end{cases}$

74. 圆$x^2+y^2=r^2$的参数方程为$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$（θ为参数）

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$（θ为参数）

75. 求轨迹方程的常用方法有哪些？注意讨论范围。

（直接法、定义法、转移法、参数法）

76. 对线性规划问题：作出可行域，作出以目标函数为截距的直线，在可行域内平移直线，求出目标函数的最值。