解析几何综合题解题方法总结

解析几何综合题是高考命题的热点内容之一．这类试题往往以解析几何知识为载体，综合函数、不等式、三角、数列等知识，所涉及到的知识点较多，对解题能力考查的层次要求较高，考生在解答时，常常表现为无从下手，或者半途而废。据此笔者认为：解决这一类问题的关键在于：通观全局，局部入手，整体思维．即在掌握通性通法的同时，不应只形成一个一个的解题套路，解题时不加分析，跟着感觉走，做到那儿算那儿．而应当从宏观上去把握，从微观上去突破，在审题和解题思路的整体设计上下功夫，不断克服解题征途中的道道运算难关.

一、判别式

案例 1　已知双曲线，直线过点，$A(\sqrt{2},0)$ $(0<k<1)$ $C:\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$
斜率为，当时，双曲线的上支上有
且仅有一点 B 到直线的距离为，试求的值及此时点 B 的坐标。

分析 1：解析几何是用代数方法来研 Δ l $=0$ 究几何图形的一门学科，因此，数形结合必然是研究解析几何问题的重要手段．从“有且仅有”这个微观入手，对照草图，不难想到：过点 B 作与平行的直线，必与双曲线 C 相切．而相切的代数表现形式是所构造方程的判别式．由此出发，可设计如下解题思路：

$$l:\quad y=k(x-\sqrt{2})\quad (0<k<1)$$

$$l':\quad y=kx+\sqrt{2k^2+2}-\sqrt{2}k$$

解得k的值

解题过程略.

分析 2：如果从代数推理的角度去思 $\sqrt{2}$ l 考，就应当把距离用代数式表达，即所谓“有且仅有一点 B 到直线的距离为”，相当于化归的方程有唯一解．据此设计出如下解题思路：

问题

⇕

关于 x 的方程有唯一解

⇓ 转化为一元二次方程根的问题

求解

简解：设点为双曲线C上支上 $M(x,\sqrt{2+x^2})$

任一点，则点M到直线的距离为：

于是，问题即可转化为如上 $(0<k<1)$ $\frac{\left|kx-\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$ $(*)$ x

关于的方程.

由于 $0<k<1$，所以 $\sqrt{2+x^2}>|x|>kx$，从而有

$$\left|kx-\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}k\right|=-kx+\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2}k.$$

于是关于的方程 $(*)$

$$-kx+\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2}k=\sqrt{2(k^2+1)}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(\sqrt{2+x^2}\right)^2=\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k+kx\right)^2,\\ \sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k+kx>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(k^2-1)x^2+2k\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)x+\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)^2-2=0,\\ \sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k+kx>0.\end{cases}$$

由 $0<k<1$ 可知：方程的 $(k^2-1)x^2+2k\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)x+\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)^2-2=0$

二根同正，故 $\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k+kx>0$

恒成立，于是 $(*)$ 等价于

$$(k^2-1)x^2+2k\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)x+\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)^2-2=0.$$

由如上关于 x 的方程有唯一解，得其判别式 $\Delta=0$，就可解得 $k=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

点评：上述解法紧扣解题目标，不断进行问题转换，充分体现了全局观念与整体思维的优越性.

2　判别式与韦达定理

例2．已知椭圆C: $x^2+2y^2=8$ 和点P（4，1），过P作直线交椭圆于A、B两点，在线段AB上取点Q，使 $\frac{AP}{PB}=-\frac{AQ}{QB}$，求动点Q的轨迹所在曲线的方程.

分析：这是一个轨迹问题，解题困难在于多动点的困扰，学生往往不知从何入手。其实，应该想到轨迹问题可以通过参数法求解．因此，首先是选定参数，然后想方设法将点Q的横、纵坐标用参数表达，最后通过消参可达到解题的目的.

由于点 $Q(x,y)$ 的变化是由直线AB的变化引起的，自然可选择直线AB的斜率 k 作为参数，如何将 x,y 与 k 联系起来？一方面利用点Q在直线AB上；另一方面就是运用题目条件：$\frac{AP}{PB}=-\frac{AQ}{QB}$ 来转化.由A、B、P、Q四点共线，不难得到 $x=\frac{4(x_A+x_B)-2x_Ax_B}{8-(x_A+x_B)}$，要建立与的关系，只需将直

线 AB 的方程代入椭圆 C 的方程，利用韦达定理即可.

通过这样的分析，可以看出，虽然我们还没有开始解题，但对于如何解决本题，已经做到心中有数.

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

$\downarrow$

$$x = \frac{4(x_A + x_B) - 2x_A x_B}{8 - (x_A + x_B)}$$

$\downarrow$ 将直线方程代入椭圆方程，消去 y，利用韦达定理

$$x = f(k)$$

$\downarrow$ 利用点 Q 满足直线 AB 的方程：$y = k(x—4)+1$，消去参数 k

点 Q 的轨迹方程

在得到 $x = f(k)$ 之后，如果能够从整体 $y = k(x-4)+1$ 上把握，认识到：所谓消参，目的不过是得到关于 x, y 的方程（不含 k），则可由 $y = k(x-4)+1$ 解得 $k = \frac{y-1}{x-4}$，直接代入 $x = f(k)$ 即可得到轨迹方程。从而简化消去参的过程。

简解：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), Q(x, y)$，则由 $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$ 可得：$\frac{4 - x_1}{x_2 - 4} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$，

解之得：$x = \frac{4(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2}{8 - (x_1 + x_2)}$ （1）

设直线 AB 的方程为：$y = k(x - 4) + 1$，代入椭圆 C 的方程，消去 y 得出关于 x 的一元二次方程：

（2） $(2k^2 + 1)x^2 + 4k(1 - 4k)x + 2(1 - 4k)^2 - 8 = 0$

$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4k(4k-1)}{2k^2+1}, \\ x_1 x_2 = \frac{2(1-4k)^2 - 8}{2k^2+1}. \end{cases}$

代入（1），化简得：$x = \frac{4k+3}{k+2}$，(3)

与 $y = k(x-4)+1$ 联立，消去 k 得：$2x + y - 4 = 0$.

在（2）中，由 $\Delta = -32k^2 + 64k + 24 > 0$，解得 $\frac{2 - \sqrt{10}}{4} < k < \frac{2 + \sqrt{10}}{4}$，结合（3）可求得 $\frac{16 - 2\sqrt{10}}{9} < x < \frac{16 + 2\sqrt{10}}{9}$.

故知点 Q 的轨迹方程为：$2x + y - 4 = 0$ （$\frac{16 - 2\sqrt{10}}{9} < x < \frac{16 + 2\sqrt{10}}{9}$）.

点评：由方程组实施消元，产生一个标准的关于一个变量的一元二次方程，其判别

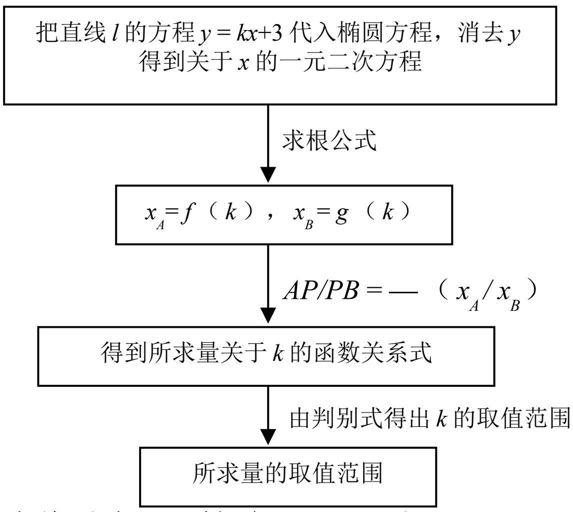
式、韦达定理模块思维易于想到．这当中，难点在引出参，活点在应用参，重点在消去参.，而“引参、用参、消参”三步曲，正是解析几何综合问题求解的一条有效通道.

3　求根公式

例 3.　设直线过点 P（0，3），$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 和椭圆顺次交于 A、B 两点，试求 $\frac{AP}{PB}$ 的取值范围.

分析：本题中，绝大多数同学不难得到：$\frac{AP}{PB}$=$-\frac{x_A}{x_B}$，但从此后却一筹莫展，问题的根源在于对题目的整体把握不够．事实上，所谓求取值范围，不外乎两条路：其一是构造所求变量关于某个（或某几个）参数的函数关系式（或方程），这只需利用对应的思想实施；其二则是构造关于所求量的一个不等关系.

分析 1： 从第一条想法入手，$\frac{AP}{PB}$=$-\frac{x_A}{x_B}$ 已经是一个关系式，但由于有两个变量 x_A, x_B，同时这两个变量的范围不好控制，所以自然想到利用第 3 个变量——直线 *AB* 的斜率 *k*．问题就转化为如何将 x_A, x_B 转化为关于 *k* 的表达式，到此为止，将直线方程代入椭圆方程，消去 y 得出关于 x 的一元二次方程，其求根公式呼之欲出.



简解 1： 当直线 l 垂直于 x 轴时，可求得 $\frac{AP}{PB}=-\frac{1}{5}$；

当 l 与 x 轴不垂直时，设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，直线的方程为：$y=kx+3$，代入椭圆方程，消去 y 得 $(9k^2+4)x^2+54kx+45=0$，解之得 $x_{1,2}=\frac{-27k\pm 6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}$.

因为椭圆关于 y 轴对称，点 P 在 y 轴上，所以只需考虑 $k>0$ 的情形.

当 $k>0$ 时，$x_1=\frac{-27k+6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}$，$x_2=\frac{-27k-6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}$，

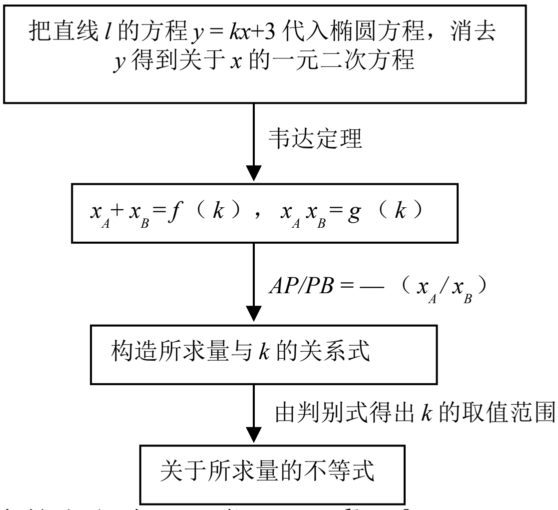
所以 $\frac{AP}{PB}=-\frac{x_1}{x_2}=\frac{9k-2\sqrt{9k^2-5}}{9k+2\sqrt{9k^2-5}}=1-\frac{18}{9+2\sqrt{9-\frac{5}{k^2}}}$.

由 $\Delta=(-54k)^2-180(9k^2+4)\ge0$，解得 $k^2\ge\frac{5}{9}$，

所以 $-1\le 1-\frac{18}{9+2\sqrt{9-5\frac{1}{k^2}}}<-\frac{1}{5}$，

综上 $-1\le\frac{AP}{PB}\le-\frac{1}{5}$.

分析2：如果想构造关于所求量的 $\frac{AP}{PB}$ 不等式，则应该考虑到：判别式往往是产生不等的根源．由判别式值的非负性可以很快确定 k 的取值范围，于是问题转化为如何将所求量与 k 联系起来．一般来说，韦达定理总是充当这种问题的桥梁，但本题无法直接应用韦达定理，原因在于 $\frac{AP}{PB}=-\frac{x_1}{x_2}$ 不是关于 x_1,x_2 的对称关系式．原因找到后，解决问题的方法自然也就有了，即我们可以构造关于 x_1,x_2 的对称关系式.



简解2：设直线的方程为：$y=kx+3$，代入椭圆方程，消去 y 得

$$(9k^2+4)x^2+54kx+45=0 \quad (*)$$

则 $x_1+x_2=-\frac{54k}{9k^2+4}$，$x_1x_2=\frac{45}{9k^2+4}$，令 $\lambda=\frac{x_1}{x_2}$，则 $\lambda+\frac{1}{\lambda}+2=\frac{324k^2}{45k^2+20}$.

在（*）中，由判别式 $\Delta\ge0$ 可得 $k^2\ge\frac{5}{9}$，

从而有 $4\le\frac{324k^2}{45k^2+20}\le\frac{36}{5}$，

所以 $4\le\lambda+\frac{1}{\lambda}+2\le\frac{36}{5}$，

解得 $\frac{1}{5}\le\lambda\le5$.

结合 $0<\lambda\le1$ 得 $\frac{1}{5}\le\lambda\le1$.

综上，$-1\le\frac{AP}{PB}\le-\frac{1}{5}$.

点评：范围问题不等关系的建立途径多多，诸如判别式法，均值不等式法，变量的有界性法，函数的性质法，数形结合法等等．本题也可从数形结合的角度入手，给出又

一优美解法.