# 高中数学之数形结合思想

## 黄老师编辑

数形结合思想在高考中占有非常重要的地位，其“数”与“形”结合，相互渗透，把代数式的精确刻划与几何图形的直观描述相结合，使代数问题、几何问题相互转化，使抽象思维和形象思维有机结合. 应用数形结合思想，就是充分考查数学问题的条件和结论之间的内在联系，既分析其代数意义又揭示其几何意义，将数量关系和空间形式巧妙结合，来寻找解题思路，使问题得到解决. 运用这一数学思想，要熟练掌握一些概念和运算的几何意义及常见曲线的代数特征.

我们通过下面这个例题加以说明。

［例］设$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3$，且$x\in \mathbf{A}\}$，$C=\{z\mid z=x^2$，且$x\in \mathbf{A}\}$，若$C\subseteq B$，求实数$a$的取值范围.

命题意图：本题借助数形结合，考查有关集合关系运算的题目.属于较难的题目。.

知识依托：解决本题的关键是依靠一元二次函数在区间上的值域求法确定集合 $C$，进而将 $C\subseteq B$ 用不等式这一数学语言加以转化.

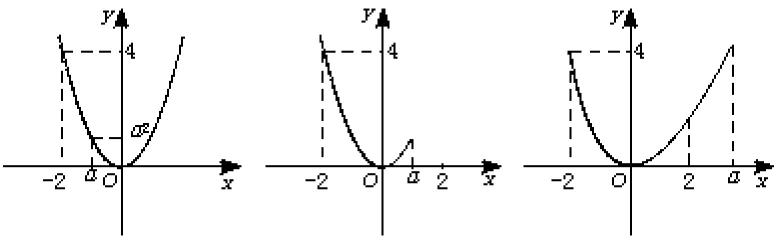
错解分析：考生在确定$z=x^2$，$x\in[-2,a]$的值域时易出错，不能分类讨论.巧妙观察图象是上策.不能漏掉$a<-2$ 这一种特殊情形.

技巧与方法：解决集合问题首先要看清元素究竟是什么，然后再把集合语言“翻译”为一般的数学语言，进而分析条件与结论特点，再将其转化为图形语言，利用数形结合的思想来解决.

解：∵$y=2x+3$ 在$[-2, a]$上是增函数

∴$-1\leqslant y\leqslant 2a+3$，即 $B=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$

作出$z=x^2$的图象，该函数定义域右端点$x=a$有三种不同的位置情况如下：

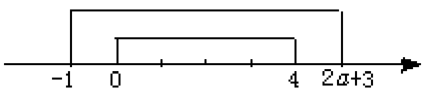



①当$-2\leqslant a<0$ 时，$a^2\leqslant z\leqslant 4$ 即$C=\{z\mid a^2\leqslant z\leqslant 4\}$

要使 $C\subseteq B$,必须且只需 $2a+3\geqslant 4$ 得 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 与$-2\leqslant a<0$ 矛盾.

②当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时，$0\leqslant z\leqslant 4$ 即 $C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 4\}$，要使 $C\subseteq B$，由图可知：

必须且只需$\begin{cases}2a+3\geq 4\\ 0\leq a\leq 2\end{cases}$




解得$\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$

③当$a>2$ 时，$0\leqslant z\leqslant a^2$，即$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant a^2\}$，要使$C\subseteq B$必须且只需

$\begin{cases}a^2\leq 2a+3\\ a>2\end{cases}$解得 $2<a\leqslant 3$

④当 $a<-2$ 时，$A=\varnothing$，此时 $B=C=\varnothing$，则 $C\subseteq B$ 成立.

综上所述，$a$ 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup\left[\dfrac{1}{2},3\right]$.