数学中的等价转化方法

黄老师编辑

等价转化是把未知解的问题转化到在已有知识范围内可解的问题的一种重要的思想方法．通过不断的转化，把不熟悉、不规范、复杂的问题转化为熟悉、规范甚至模式法、简单的问题．历年高考，等价转化思想无处不见，我们要不断培养和训练自觉的转化意识，将有利于强化解决数学问题中的应变能力，提高思维能力和技能、技巧．

转化有等价转化与非等价转化．等价转化要求转化过程中前因后果是充分必要的，才保证转化后的结果仍为原问题的结果．非等价转化其过程是充分或必要的，要对结论进行必要的修正（如无理方程化有理方程要求验根），它能给人带来思维的闪光点，找到解决问题的突破口．我们在应用时一定要注意转化的等价性与非等价性的不同要求，实施等价转化时确保其等价性，保证逻辑上的正确．

著名的数学家，莫斯科大学教授C.A.雅洁卡娅曾在一次向数学奥林匹克参赛者发表《什么叫解题》的演讲时提出："解题就是把要解题转化为已经解过的题"．数学的解题过程，就是从未知向已知、从复杂到简单的化归转换过程．

等价转化思想方法的特点是具有灵活性和多样性．在应用等价转化的思想方法去解决数学问题时，没有一个统一的模式去进行．它可以在数与数、形与形、数与形之间进行转换；它可以在宏观上进行等价转化，如在分析和解决实际问题的过程中，普通语言向数学语言的翻译；它可以在符号系统内部实施转换，即所说的恒等变形．消去法、换元法、数形结合法、求值求范围问题等等，都体现了等价转化思想，我们更是经常在函数、方程、不等式之间进行等价转化．可以说，等价转化是将恒等变形在代数式方面的形变上升到保持命题的真假不变．由于其多样性和灵活性，我们要合理地设计好转化的途径和方法，避免死搬硬套题型．

1、转化与化归的原则：**熟悉化、简单化、直观化、正难则反 标准化**

在数学操作中实施等价转化时，我们要遵循**熟悉化、简单化、直观化、正难则反 标准化**的原则，即把我们遇到的问题，通过转化变成我们比较熟悉的问题来处理；或者将较为繁琐、复杂的问题，变成比较简单的问题，比如从超越式到代数式、从无理式到有理式、从分式到整式…等；或者比较难以解决、比较抽象的问题，转化为比较直观的问题，以便准确把握问题的求解过程，比如数形结合法；或者从非标准型向标准型进行转化．按照这些原则进行数学操作，转化过程省时省力，有如顺水推舟，经常渗透等价转化思想，可以提高解题的水平和能力．

2、常见的转化方法：

转化与化归思想用在研究、解决数学问题时思维受阻或寻求简单方法或从一种状况转化到另一种情形，也就是转化到另一种情境使问题得到解决，这种转化是解决问题的有效策略，同时也是成功的思维方式，那么选择哪些途径可以实现这个转化过程呢？常见的有：

（1）直接转化法：把问题直接转化为基本定理、基本公式或基本图形问题。

（2）换元法：运用"换元"把超越式转化为有理式或使整式降幂等，把较复杂的函数、方程、不等式问题转化为易于解决的基本问题。

（3）数形结合法：研究问题中数量关系（解析式）与空间形式（数形）关系，通过互相变换获得转化途径。

（4）参数法：引进参数，使原问题的变换具有灵活性，易于转化。

（5）构造法："构造"一个合适的数学模型，把问题变为易于解决的问题

（6）坐标法：以坐标系为工具，用计算方法解决几何问题，是转化方法的一个重要途径。

（7）类比法：运用类比推理，猜测问题的结论，易于确定转化途径。

（8）特殊化方法：把问题的形式向特殊化化形式转化，并证明特殊化后的结论适合原问题。

（9）一般化方法：若原问题是某个一般化形式问题的特殊化形式且又较难解决，可将问题通过一般化的途径进行转化。

（10）等价问题法：把原问题转化为一个易于解决的等等命题，达到转化的目的。

（11）补集法：如果正面解决原问题有困难，可把原问题结果看作集合 A，而把包含该问题的整体问题的结果类比为全集U，通过解决全集U及补集获得原问题的解决。

以上所列的一些方法是互相交叉的，不能截然分割。

3、在高考中，转化与化归思想占有相当重要的地位，主要涉及的基本类型：

（1）正与反、一般与特殊的转化，即正难则反，特殊化原则。

（2）常量与变量的转化，即在处理多元问题时，选取其中的变量（或参数）当“主元”，其他的看作常量。

（3）数与形的转化

（4）数学各分支之间的转化，如利用向量方法解决立体几何问题，用解析几何方法处理平面几何、代数、三角问题等。

（5）相等与不等这间的转化，如利用均值不等式，判别式等

（6）实际问题与数学模型的转化。

要注意依据问题本身所提供的信息，利用动态的思维，去寻求有利于问题解决的转化与化归的途径与方法。

一、示范性例题： 设 x、y∈R 且 $3x^2+2y^2=6x$，求 x^2+y^2 的范围.

【分析】 设 $k=x^2+y^2$，再代入消去 y，转化为关于 x 的方程有实数解时求参数 k 范围的问题. 其中要注意隐含条件，即 x 的范围.

【解】由 $6x-3x^2=2y^2\geqslant 0$ 得 $0\leqslant x\leqslant 2$.

设 $k=x^2+y^2$，则 $y^2=k-x^2$，代入已知等式得：$x^2-6x+2k=0$ ，

即 $k=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$，其对称轴为 $x=3$.

由 $0\leqslant x\leqslant 2$ 得 $k\in[0,4]$.

所以 x^2+y^2 的范围是：$0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

【另解】 数形结合法（转化为解析几何问题）:

由 $3x^2+2y^2=6x$ 得 $(x-1)^2+\dfrac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$，即表示如图所示椭圆，其一个顶点在坐标原点. x^2+y^2 的范围就是椭圆上的点到坐标原点的距离的平方. 由图可知最小值是 0,距离最大的点是以原点为圆心的圆与椭圆相切的切点. 设圆方程为 $x^2+y^2=k$，代入椭圆中消 y 得 $x^2-6x+2k=0$. 由判别式 $\triangle=36-8k=0$ 得 $k=4$, 所以 x^2+y^2 的范围是：$0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

【再解】 三角换元法，对已知式和待求式都可以进行三角换元（转化为三角问题）:

由 $3x^2+2y^2=6x$ 得 $(x-1)^2+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$，设 $\begin{cases} x-1=\cos\alpha \\ y=\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\alpha \end{cases}$，则

$x^2+y^2=1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\frac{3}{2}\sin^2\alpha=1+\frac{3}{2}+2\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos^2\alpha$

$=-\frac{1}{2}\cos^2\alpha+2\cos\alpha+\frac{5}{2}\in[0,4]$

所以 x^2+y^2 的范围是：$0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

【注】本题运用多种方法进行解答，实现了多种角度的转化，联系了多个知识点，有助于提高发散思维能力．此题还可以利用均值换元法进行解答．各种方法的运用，分别将代数问题转化为了其它问题，属于问题转换题型.

二 习题

1. $(a+b+c)^{10}$ 展开式的系数和是（　　　　）

A 11　　　　B 66　　　　C 132　　　　D 3^{10}

2、若函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+4ax+3}$ 的定义域为 R，则实数 a 的取值范围是（　　　　）

A $(0,\frac{3}{4}]$　　　　B $(0,\frac{3}{4})$　　　　C $[0,\frac{3}{4}]$　　　　D $[0,\frac{3}{4})$

3、直线 $x+y+p=1$ 与 $x^2+y^2=1-p^2$ 总有公共点，求实数 P 的范围

4、已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若关于 x 的方程 $\log_a(x-3)-\log_a(x+2)-\log_a(x-1)=1$ 有实根，求实数 a 的取值范围。

5、在球面上有四个点 P、A、B、C，如果 PA、PB、PC 两两互相垂直，且 PA＝PA＝PC＝a，那么这个球的表面积是_______

6. 已知三棱锥 S-ABC 的三条侧棱两两垂直，SA＝5，SB＝4，SC＝3，D 为 AB 的中点，E 为 AC 的中点，则四棱锥 S-BCED 的体积为(　　　)．

A. $\frac{15}{2}$　　　　B. 10　　　　C. $\frac{25}{2}$　　　　D. $\frac{35}{2}$