第十一节、数论

近年来,自主招生试题中常常会涉及到一些简单的数论问题,这些问题主要有整除问题、高斯函数、素因数分解、同余问题以及不定方程等.

解决数论问题的方法

1. 奇偶分析法
2. 不等分析法
3. 无穷递降法
4. 特殊模法
5. 最小数原理
6. 整除的应用
7. 进位制的作用

1.有理数和无理数

例1.(2009清华大学)请写出所有三个数均为质数，且公差为8的等差数列，并证明你的结论

例2.(2009北京大学)是否存在实数x,使tanx+$\sqrt{3}$ 与cotx+ $\sqrt{3}$为有理数？

例3（2006清华大学自主招生考试）求由正整数组成的至少两个元素的集合S，使得S中的所有元素之和等于所有元素之积.

2.整除问题

例3(2012年北约自主招生试题)在1,2,3,…,2012中取一组数,使任意两个数之和不能被其差整除,最多能取多少个数?)

例4(2009年江苏卷）设$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，S_n为其前n项和，满足$a_2^2+a_3^2=a_4^2+a_5^2, S_7=7$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式及前n项和S_n;

(2)试求所有的正整数m，使得$a_m a_{m+2}/a_{m+1}$为数列$\{a_n\}$中的项.

2、对于实数x，$[x]$表示不超过x的最大整数。对于某个整数k，恰存在 2008 个正整数$n_1, n_2, \cdots, n_{2008}$，满足$k=\left[\sqrt[3]{n_1}\right]=\left[\sqrt[3]{n_2}\right]=\cdots=\left[\sqrt[3]{n_{2008}}\right]$，并且$k$整除$n_i(i=1,2,\cdots 2008)$，则$k=$______________.

例 1. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2010}$的小数点后一位数字是______________.

例 2. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 500]=$______.

练习：

1、设$[x]$表示不超过x的最大整数，则$[\lg 1]+[\lg 2]+[\lg 3]+\cdots+[\lg 2010]=$________.

例 3.如果正整数n可以写成a^b($其中a,b\in N,a\geq 2,b\geq 2$)的形式，则称$n$为“好数”.

在与 2 的正整数次幂相邻的正整数中，试找出所有的“好数”.

（2）若l为偶数，则$k^l \equiv 1 \pmod 4$.

若$2^t = k^l + 1$，则$2^t = k^l + 1 \equiv 2 \pmod 4$，从而$t = 1$，故$k^l = 2^1 - 1 = 1$，它不是“好数”.

若$2^t = k^l - 1 = (k^{\frac{l}{2}} + 1)(k^{\frac{l}{2}} - 1)$，则$k^{\frac{l}{2}} + 1 \mid 2^t$，$k^{\frac{l}{2}} - 1 \mid 2^t$.

设$k^{\frac{l}{2}} + 1 = 2^p$，$k^{\frac{l}{2}} - 1 = 2^q$，其中$p, q \in N$，$p > q$，$p + q = t$.

所以$2 = 2^p - 2^q = 2^q(2^{p-q} - 1)$，又$2^{p-q} - 1$为奇数，所以$2^q = 2$，$2^{p-q} - 1 = 1$，解得$p = 2, q = 1$，从而$k^l = 2^t + 1 = 2^{p+q} + 1 = 2^3 + 1 = 9$.

综合可知，“好数”只有一个，即 9.

练习：

1、(89 全国) 一个正数，若其小数部分、整数部分和其自身成等比数列，则该数为______________.

例 4.求满足下列条件的所有正整数x、y：（1）x与$y-1$互素； （2）$x^2-x+1=y^3$.

例 5.设 a，b，c 是正整数，且成等比数列，$b-a$ 是一个完全平方数，$\log_6 a+\log_6 b+\log_6 c=6$，则 $a+b+c=$________．

例 6. 设$\{a_n\}$为一个整数数列，并且满足：$(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_n-2(n-1)$，$n\in N_+$．若$2008|a_{2007}$，则满足$2008|a_n$且$n\geq 2$的最小正整数$n$是___________．

例 7.数列$\{a_n\}$定义如下：$a_0=a_1=1, a_{n+2}=14a_{n+1}-a_n$(其中 $n\in N$)，求证：对所有的正整数 n，$2a_n-1$ 是完全平方数。

例 8、2^{2003} 的十进制表示是个 P 位数，5^{2003} 的十进位表示是个 q 位数，则 p+q=______。

例 9、已知$x_0=1,x_1=3,x_{n+1}=6x_n-x_{n-1}\left(n\in N^+\right)$，求证数列$\{x_n\}$中无完全平方数.

例 1.对正整数 n，记 $f(n)$ 为数 $3n^2+n+1$ 的十进制表示的数码和.

(1) 求 $f(n)$ 的最小值； (2) 是否存在一个正整数 n，使得 $f(n)=100$？

例 2.记 $F(x,y)=(x-y)^2+(\frac{x}{3}+\frac{3}{y})^2$，$(y\neq 0)$，则 $F(x,y)$ 的最小值是（　　）.

A、 $\frac{12}{5}$　　B、 $\frac{16}{5}$　　C、 $\frac{18}{5}$　　D、4

例 2 （2010 年湖北卷）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{3(1+a_{n+1})}{1-a_n}=\frac{2(1+a_n)}{1-a_{n+1}}$，$a_na_{n+1}<0$（$n\geqslant 1$），数列$\{b_n\}$满足：$b_n=a_{n+1}^2-a_n^2(n\geqslant 1)$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）证明：数列$\{b_n\}$中的任意 3 项不可能成等差数列.

（2）用反证法证明

假设数列$\{b_n\}$存在3项b_r, b_s, b_t（$1 \leqslant r < s < t$）按某种顺序成等差数列，由于数列$\{b_n\}$是首项为$\frac{1}{4}$，公比为$\frac{2}{3}$的等比数列，于是有$b_r > b_s > b_t$，则只有可能有$2b_s = b_r + b_t$成立 即

$$2 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{s-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{r-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{t-1},$$

则

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{s-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{r-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{t-1}.$$

因为$0 \leqslant r-1 < s-1 < t-1$，所以上式可化为

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{s-r} = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{t-r},$$

即

$$2 \cdot 2^{t-r} \cdot 3^{t-s} = 3^{t-r} + 2^{t-r}.$$

1 不等式估计

例 1 求所有非 Rt $\triangle ABC$,使得

$\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

$\leqslant[\tan A]+[\tan B]+[\tan C]$,

其中,$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.

(2009,南京大学自主招生考试)

例 2　求由正整数组成的至少两个元素的集合 S，使得 S 中的所有元素之和等于所有元素之积.

（2006，清华大学自主招生考试）

二．同余的性质

例 6.求 $(7^{2004}+36)^{818}$ 的个位数. （2004 年上海交通大学）

例7 .求正整数区间[m，n]中不能被 3 整除的数之和. （2008 年清华大学）

费尔马(Fermat)小定理

$p \mid n^{p}-n, n \in \mathrm{N}, p$为质数.

这个结论可用数学归纳法证明.

三．构造法

例 9.已知 $A=\{x|n!+n,n\in N^*\}$，B是A在N^*上的补集.

（1）求证：不能在集合B中取得一个有无限项的公差不是 0 的等差数列；、

（2）是否能在集合B中找到一个有无限多项的等比数列？

（2009 年中国科技大学）

四．不等式估计

例 11.求有限集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相等的正整数，使得 $a_1a_2\cdots a_n=a_1+a_2+\cdots a_n$.

（2009 年上海交通大学）（2006 年清华大学）

例 12. 求所有满足 $\tan A+\tan B+\tan C\le[\tan A]+[\tan B]+[\tan C]$ 的非直角三角形 ΔABC.这里 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数（例如 $[-1.6]=-2$， $[1.6]=1$）.

（2009 年南京大学）

1. 奇偶分析

奇数与偶数有如下概念与性质:

(1) 若一个整数能被2整除, 则这个整数叫偶数. 若一个整数被2除余1, 则这个整数叫奇数;

(2) 奇数个奇数的和(或差)是奇数, 偶数个奇数的和(或差)是偶数;

(3) 一个奇数与一个偶数的和(或差)是奇数;

(4) 任意多个奇数的积是奇数.

例1 (2010年全国高考湖北卷) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$, $\frac{3(1+a_{n+1})}{1-a_n}=\frac{2(1+a_n)}{1-a_{n+1}}$, $a_n a_{n+1}<0\,(n\geqslant 1)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{n+1}^2-a_n^2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 中任意三项不可能成等差数列.

例10．将数轴上的每个点用N种颜色之一染色，要求任意距离为1、$\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$的两点不同色，求N的最小值．(2010年清华大学）