伸缩变换下的椭圆

按照克莱因 (F.Klein) 关于几何学的爱尔兰根 (Erlangen) 纲领：设给定一个集合以及此集合的元素间的一个变换群，我们把此集合叫做空间，集合的元素叫做点，子集叫做图形，于是空间内图形对于此群（指群中的一切变换）的不变性质（包括不变性与不变量）的命题系统的研究就称为这空间的几何学。

而伸缩变换就是一种变换群，因此在伸缩变换下图形会保持一系列的不变性质，由此可以想到对于一个问题既然可以由特殊情形到一般情形进进行研究，同样也可以由一般情形到特殊情形，下面先介绍伸缩变换，然后以椭圆为例进行分析。

伸缩变换

给定平面 π，称由平面 π 到自身的任意映射 $\Psi:\pi\to\pi$ 为平面 π 上的一个点的变换。

特别的，在平面 π 上选取直角坐标系后用方程

$$\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \end{cases},\ ab\neq 0$$

组给出的变换叫做平面 π 的伸缩变换。

从直观上看，伸缩变换就是分别在 x 轴和 y 轴两个方向进行伸缩。下面依次从线、角、面三个角

线

- 伸缩变换将点映射到点，直线对应直线。（同素性）。
- 点 A 、 B 、 C 在直线 n 上，伸缩变换后其对应点 A' 、 B' 、 C' 在对应直线 n' 上。（结合性）
- 共线三点的单比不变

角

- 若直线垂直于 x 轴，则变换后仍垂直 x 轴，否则变换将直线的斜率变成原来的 $\frac{b}{a}$ 倍。
- 两条平行直线变换后仍为平行直线。
- 两条垂直直线若斜率都存在，则变换后斜率的乘积为 $\frac{b^2}{a^2}$ 。
- 两相交（相切、相离）曲线仍变为两相交（相切、相离）曲线。

面

- 三角形变为三角形，面积由 S 变为 |ab|S

证明：在笛卡尔坐标系中，不共线的三点 P1(x1,y1), P2(x2,y2),P3(x3,y3) 经过伸缩变换变换为不共线的三点 P1'(x1',y1'),P2'(x2',y2'),P3'(x3',y3'), 于是

$$S_{\Delta P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

的绝对值

$$S_{\Delta P_1'P_2'P_3'}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

的绝对值

将 (2) 代入 (1), 得 :

$$S_{\Delta P_1'P_2'P_3'} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ax_1 & by_1 & 1 \\ ax_2 & by_2 & 1 \\ ax_3 & by_3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

$$= |ab| S_{\Delta P_1 P_2 P_3}$$

- n 边形变为 n 边形，面积由 S 变为 |ab|S
- 特别的，椭圆面积为 ab*pi

在椭圆中的应用

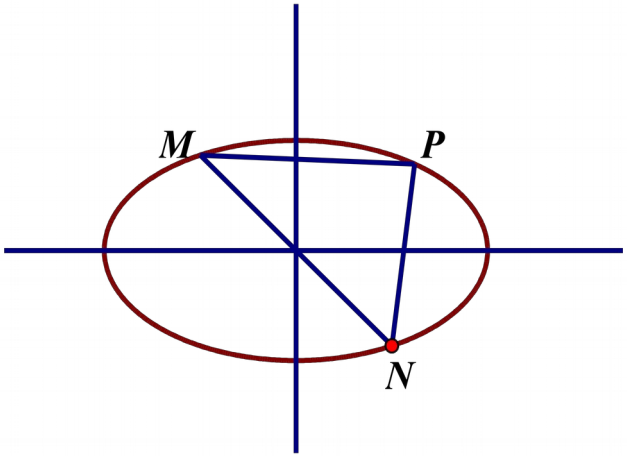
结论 1　若 MN 是椭圆的过中心的弦， P 是椭圆上异于 M 、 N 的任意一点，则两条直线 PM 、 PN 的斜率之积为定值 -b^2/a^2

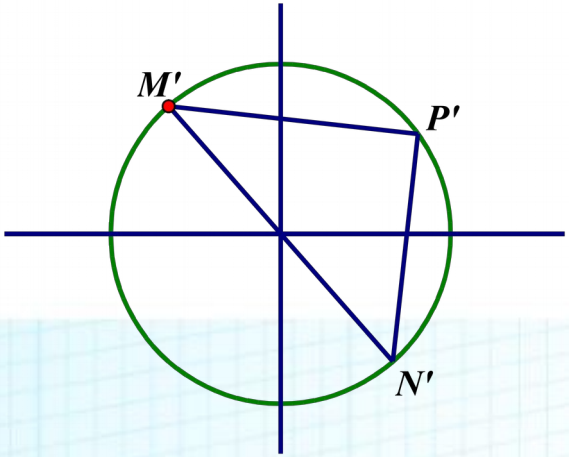
证明：椭圆经伸缩变换

$$\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}$$

为单位圆，由 M'N' 为圆的直径得 P'M' 垂直于 P'N', 斜率之积为 -1 ，则原椭圆中斜率之积为

-b^2/a^2





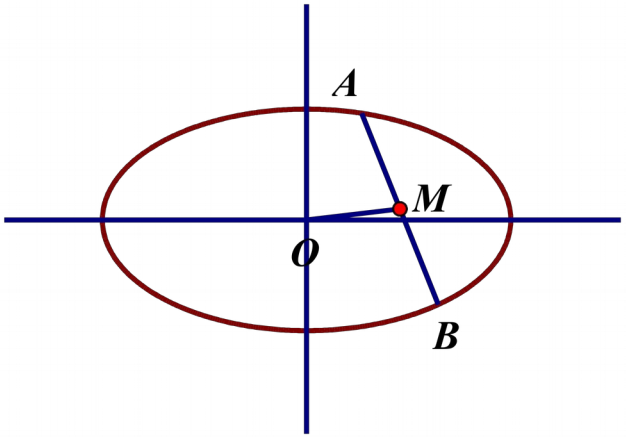
结论 2　若 AB 是椭圆的不垂直于 y 轴的弦， M 为 AB 的中点， O 为坐标原点，则 Kab*Kom=-b^2/a^2

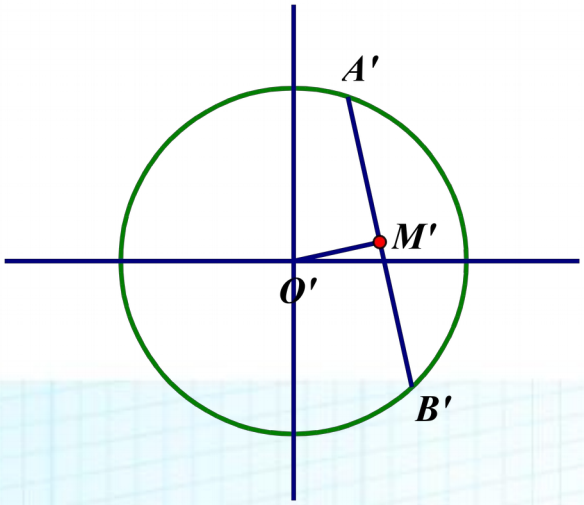
证明：椭圆经伸缩变换

$$\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}$$

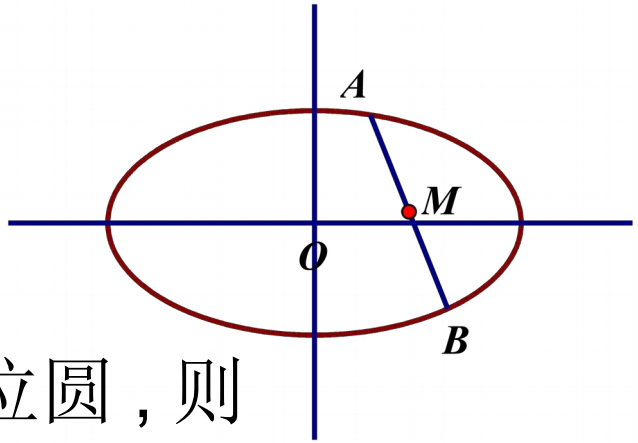
为单位圆，变换保持共线三点单比不变， M' 仍为 A'B' 的中点由垂径定理得 O'M' 垂直于 A'B',

则原椭圆中 Kab*Kom=-b^2/a^2





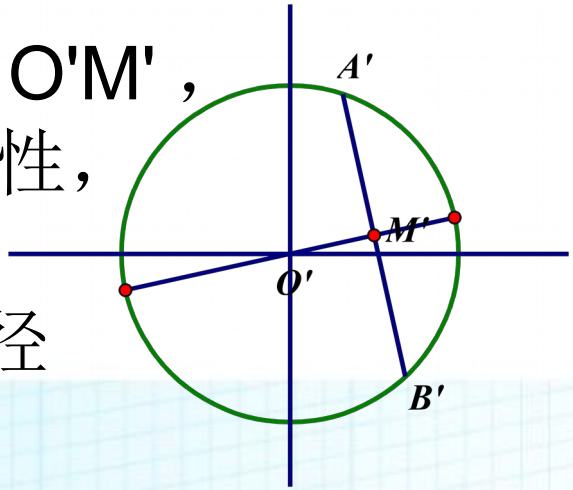
结论 3　斜率为定值 k 的动直线 l 与椭圆交于两点，则弦中点的轨迹是一条过椭圆中心的斜率为 -b^2/ka^2 的直径



证明：椭圆经伸缩变换

$$\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}$$

为单位圆，则



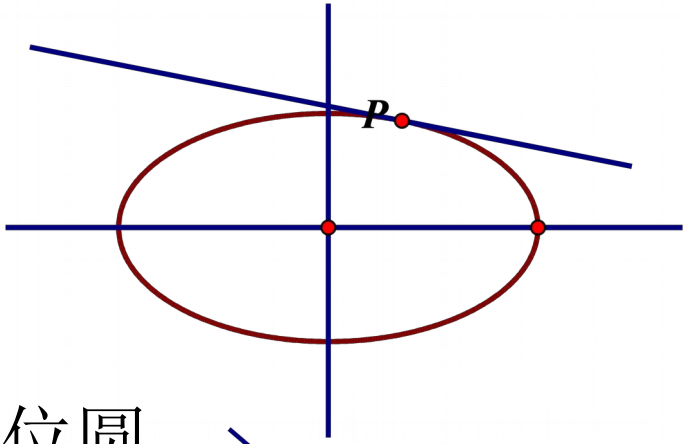
单位圆中 M' 的轨迹为过 O' 的直径 O'M'，且其斜率为 -a/bk, 由变换保持同素性，则原椭圆的弦中点轨迹为一条过椭圆中心的斜率为 -b^2/ka^2 的直径

结论 4　设 Q(x1,y1) 是椭圆内的一点，则以点 Q 为中点的弦所在的直线的方程为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$

证明：此直线为结论 3 的直径所在的直线，斜率为 -b^2/ka^2，且过点 Q(x1,y1), 则直线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$

结论 5　过椭圆上一点 P(x1,y1) 的椭圆的切线方程是

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

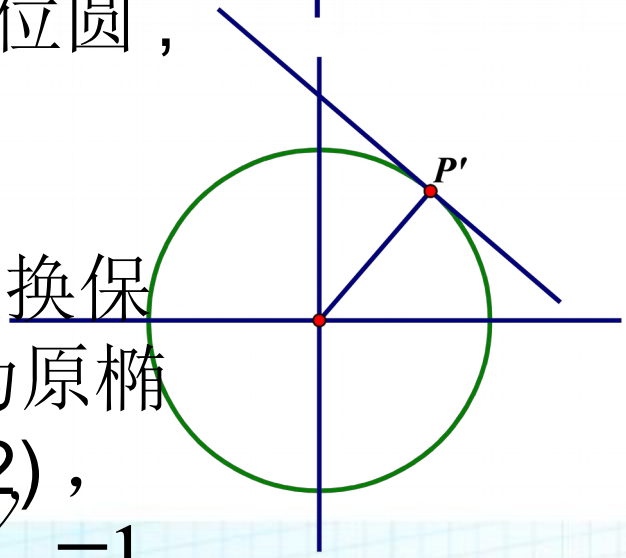


证明：椭圆经伸缩变换

$$\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}$$

为单位圆，

P'



点的切线 l' 斜率为 -ax1/by1, 由变换保持曲线的相切关系不变得直线 l 为原椭圆切线且斜率为 -(x1/a^2)/(y1/b^2)，

过点 P(x1,y1), 则方程为 $\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$

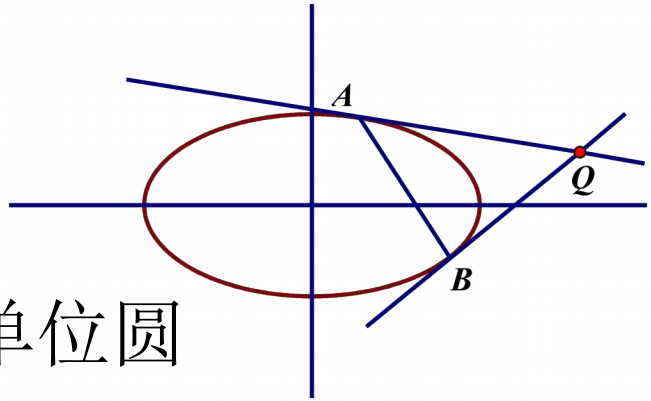
结论 6　过椭圆外一点 Q(x1,y1) 作椭圆的两条切线，则过两切点的弦所在直线的方程为

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

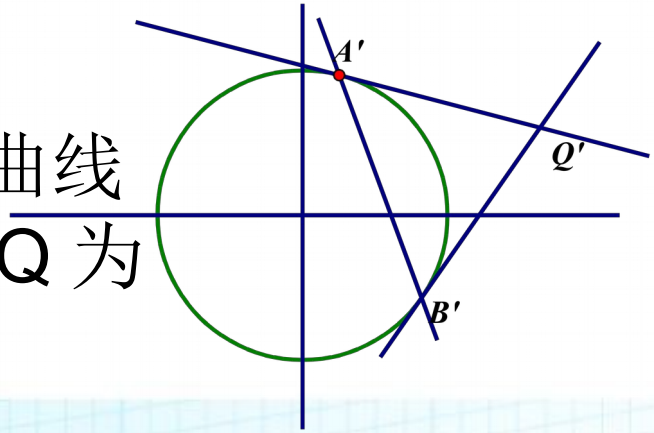
证明：椭圆经伸缩变换

$$\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}$$

为单位圆



,O'Q'



的斜率为 -ax1/by1, 由变换保持曲线的相切关系不变得直线 AQ 和 BQ 为原椭圆切线且弦 AB 斜率为 -(x1/a^2)/(y1/b^2)

结论 7　过点 Q(x1,y1) 的动直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点，则弦 AB 的中点 M 的轨迹是曲线

$$\frac{x(x-x_1)}{a^2}+\frac{y(y-y_1)}{b^2}=0$$

在椭圆 C 内的部分

证明：结论 4 的推广，证明过程从结论 4

(2009 年辽宁高考理科第 20 题)：已知椭圆 C 经过点 A(1,3/2), 两个焦点为 F1(-1,0),F2(1,0).

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2)E 、 F 是椭圆 C 上的两个动点，如果直线 AE 的斜率与 AF 的斜率互为相反数，证明直线 EF 的斜率为定值，并求出这个定值。

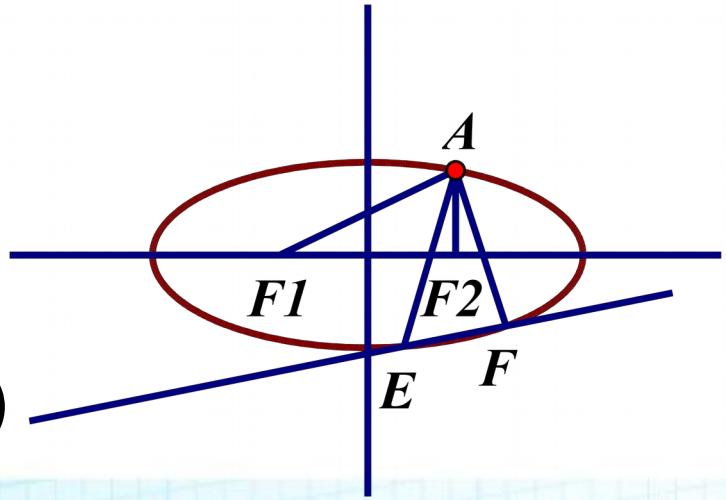
解 :(1)c=1,2a=|AF1|+|AF2|

=3/2+(9/4+4)^1/2

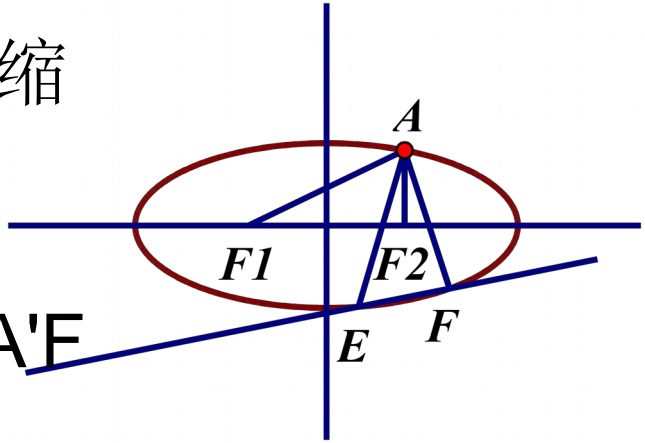
=4

则 a=2， b=3^(1/2)

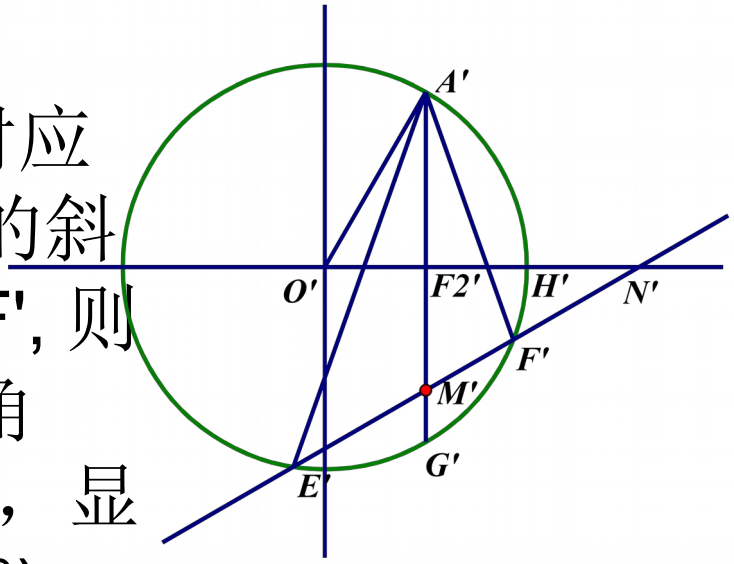
椭圆方程为: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$



(2) 当 F 在 x 轴下方时，椭圆经伸缩变换 $\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}$ 为单位圆 ,A'F 2' 垂直

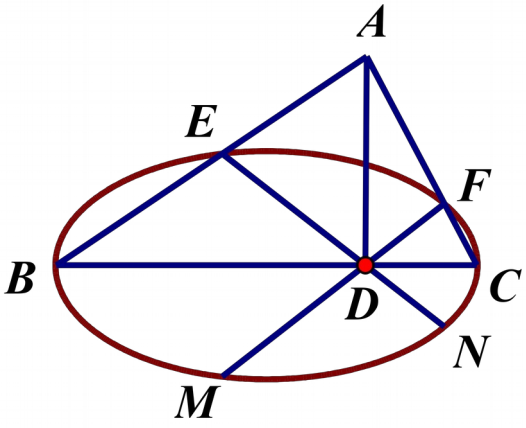


O'F2' ，由垂径定理，弧 A'H'G' 对应的圆心角为 120°，由 AE 和 AF 的斜率互为相反数可得弧 E'G'= 弧 G'F', 则弧 A'H'F'+ 弧 E'G'= 弧 A'H'G', 则角 A'E'F'+ 角 E'A'G'= 角 A'M'N'=60°，显然角 O'N'F'=30°，斜率为 tan(30°) 。



当 F 在 x 轴上方时，同理可得斜率为

在遇到椭圆与直线的位置关系问题时，可先把椭圆伸缩变换为单位圆，然后利用变换的共线三点单比不变，直线的斜率成为 b/a 倍，若椭圆的两条线斜率之积为 -b^2/a^2, 则在对应圆中两线垂直等性质，使问题得到简化。也就是从另一个角度看椭圆，加深对椭圆的理解。

思考

三角形 ABC ，以 BC 为轴 (长轴或短轴均可) 作一椭圆交 AB 于 E ，交 AC 于 F ，设 M 、 N 分别是点 E 、 F 关于直线 BC 的对称点， EN 交 MF 于 D 点，求证： AD 垂直于 BC